

TEXTE

57/2026

Teilbericht 1

Konzeptentwicklung für regelmäßige, gebündelte Abfalluntersuchungen zum Monitoring ausgewählter Abfallströme

Methodische Grundlagen der Stichprobenplanung und
Hochrechnung.

von:

Dr. Bertram Zwisele, Leonie Wachtler
ARGUS – Statistik und Informationssysteme in Umwelt und Gesundheit GmbH, Berlin

Herausgeber:

Umweltbundesamt

TEXTE 57/2026

REFOPLAN des Bundesministeriums Umwelt,
Naturschutz, nukleare Sicherheit und Verbraucherschutz

Forschungskennzahl 3723 31 103 1

Teilbericht 1

Konzeptentwicklung für regelmäßige, gebündelte Abfalluntersuchungen zum Monitoring ausgewählter Abfallströme

Methodische Grundlagen der Stichprobenplanung und
Hochrechnung.

von

Dr. Bertram Zwisele, Leonie Wachtler
ARGUS – Statistik und Informationssysteme in Umwelt
und Gesundheit GmbH, Berlin

Im Auftrag des Umweltbundesamtes

Impressum

Herausgeber

Umweltbundesamt
Wörlitzer Platz 1
06844 Dessau-Roßlau
Tel: +49 340-2103-0
Fax: +49 340-2103-2285
buergerservice@uba.de
Internet: www.umweltbundesamt.de

Durchführung der Studie:

ARGUS – Statistik und Informationssysteme in Umwelt und Gesundheit GmbH, Berlin
Karl-Heinrich-Ulrich-Str. 20a
10785 Berlin

Abschlussdatum:

Juni 2025

Redaktion:

Fachgebiet III 1.6 Kunststoffe und Verpackungen
Dr. Franziska Krüger

DOI:

<https://doi.org/10.60810/openumwelt-8146>

ISSN 1862-4804

Dessau-Roßlau, April 2026

Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autorinnen*Autoren.

Kurzbeschreibung: Konzeptentwicklung für regelmäßige, gebündelte Abfalluntersuchungen zum Monitoring ausgewählter Abfallströme

Der vorliegende Bericht „Methodische Grundlagen der Stichprobenplanung und Hochrechnung“ beschreibt die statistischen Grundlagen und praktischen Methoden zur repräsentativen Probenahme und Hochrechnung im Rahmen abfallwirtschaftlicher Untersuchungen. Ziel ist es, eine methodische Basis zu schaffen, die eine statistisch fundierte und fehlerreduzierte Analyse von Abfallströmen ermöglicht. Zentrale Aspekte umfassen die Probenplanung, das Auswahlverfahren sowie die Minimierung systematischer und zufälliger Fehler, um zuverlässige und reproduzierbare Ergebnisse sicherzustellen.

Die Untersuchung betont die Notwendigkeit einer differenzierten Herangehensweise an die Probenahme, insbesondere in Bezug auf die Heterogenität und Homogenität der Abfallströme. Der Bericht beschreibt sowohl zufällige als auch nichtzufällige Stichprobenverfahren und stellt deren Anwendungsmöglichkeiten vor. In Bezug auf die Abfallherkunft werden spezifische Methoden für die Probenahme aus Haushalten, Gewerbebetrieben sowie aus Sortier- und Verwertungsanlagen entwickelt.

Ein weiterer Abschnitt widmet sich den Verfahren der Hochrechnung und Schätzung. Hierbei werden Methoden zur Berechnung von Summen und Mittelwerten aus Stichproben vorgestellt und deren Genauigkeit sowie Konfidenzintervalle für die Schätzparameter detailliert erörtert. Ziel ist es, durch präzise und ökonomisch effiziente Stichprobenverfahren fundierte und belastbare Aussagen zur Abfallzusammensetzung zu ermöglichen. Diese können als Grundlage für strategische Entscheidungen und die Optimierung abfallwirtschaftlicher Prozesse dienen.

Abstract: Concept development for regular, bundled waste analyses to monitor selected waste streams

The following report “Methodological Foundations of Sampling Design and Estimation”, provides an in-depth analysis of the statistical principles and practical methodologies for representative sampling and estimation in waste management investigations. The primary aim is to establish a methodological basis for statistically robust and error-minimized analyses of waste streams. Key aspects include sampling design, selection procedures, and strategies to minimize both systematic and random errors, ensuring reliable and reproducible results.

The study emphasizes the need for a differentiated approach to sampling, particularly regarding the heterogeneity and homogeneity of waste streams. The report describes both probabilistic and non-probabilistic sampling methods and their applications in the analysis. Specific methods for sampling from households, businesses, as well as sorting and recycling facilities are being developed in relation to the origin of waste.

Another section is dedicated to estimation and extrapolation methods. Here, procedures for calculating sums and means from sample data are presented, with a detailed discussion of accuracy and confidence intervals for the estimated parameters. The objective is to enable accurate and economically efficient sampling designs that yield reliable and actionable insights into waste composition. These insights serve as a foundation for strategic decision-making and process optimization within waste management.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis.....	8
Tabellenverzeichnis.....	8
Abkürzungsverzeichnis.....	10
Vorbemerkung.....	11
Teil I - Probenahmemethoden	11
1 Grundlagen der Abfallprobenahme	13
1.1 Definition und Abgrenzung der Probenahme.....	13
1.2 Probenahmeplan und Probenahmekriterien.....	15
1.3 Heterogenität und Homogenität	17
1.4 Festlegung der notwendigen Stichprobenmenge.....	18
1.4.1 Genauigkeitsanforderung	19
2 Planung und Durchführung der Abfallprobenahme.....	23
2.1 Probenahme gemischter Abfallarten.....	25
2.1.1 Probenahme gemischter Abfallarten aus Sammelbehältnissen.....	25
2.1.1.1 Aus Haushalten	25
2.1.1.2 Aus Gewerbebetrieben.....	29
2.1.2 Probenahme gemischter Abfälle aus bewegten Abfallströmen vom Band.....	30
2.1.3 Probenahme gemischter Abfallarten aus ruhenden Haufwerken und Ablagerungen	33
2.2 Probenahme von Mono-Abfallarten.....	34
Teil II - Hochrechnungs- und Schätzverfahren	35
3 Stichprobenverfahren	36
3.1 Nichtzufällige Auswahlverfahren	36
3.2 Zufällige Auswahlverfahren	36
4 Hochrechnungs- oder Schätzverfahren.....	39
4.1 Einfache oder reine Zufallsstichprobe	39
4.1.1 Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert.....	39
4.1.1.1 Für die Stichprobe.....	39
4.1.1.2 Für die Grundgesamtheit.....	39
4.1.2 Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert.....	40
4.1.3 Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert.....	41
4.2 Systematische Zufallsstichprobe.....	41
4.2.1 Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert.....	41
4.2.2 Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert.....	42

4.2.3	Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert.....	43
4.3	Geschichtete Zufallsstichprobe.....	43
4.3.1	Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert.....	43
4.3.1.1	Für die Stichprobe innerhalb der h-ten Schicht.....	43
4.3.1.2	Für die Grundgesamtheit innerhalb der h-ten Schicht.....	43
4.3.1.3	Für die Stichprobe für alle Schichten.....	44
4.3.1.4	Für die Grundgesamtheit für alle Schichten.....	44
4.3.2	Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert.....	45
4.3.3	Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert.....	46
4.4	Mehrstufige Zufallsstichprobe	46
4.4.1	Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert.....	47
4.4.2	Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert.....	47
4.4.3	Fehleranteil der einzelnen Auswahlstufen eines mehrstufigen Verfahrens	48
4.4.4	Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert.....	49
4.5	Gebundene Zufallsstichprobe mit zwei Zufallsvariablen – Verhältnisschätzung.....	49
4.5.1	Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert.....	49
4.5.1.1	Für die Stichprobe.....	49
4.5.1.2	Für die Grundgesamtheit.....	49
4.5.2	Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert.....	50
4.5.3	Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert.....	51
4.6	Untersuchung der Stoffströme einer Abfallbehandlungsanlage	51
4.6.1	Methodenauswahl.....	51
4.6.2	Hochrechnung bei systematischer Zufallsauswahl	51
4.6.3	Darstellung der Ergebnisse	54
4.7	Untersuchung fester Siedlungsabfälle eines Entsorgungsgebietes	55
4.7.1	Methodenauswahl.....	55
4.7.2	Hochrechnung bei mehrstufiger geschichteter zufälliger Verhältnisauswahl.....	56
4.7.2.1	Darstellung der Ergebnisse	61
4.7.3	Hochrechnung bei nichtzufälligen Auswahlverfahren nach dem Konzentrationsprinzip.....	65
4.7.3.1	Methodenauswahl.....	65
4.7.3.2	Auswertung.....	65
5	Schlussbemerkungen.....	68
6	Quellenverzeichnis	69

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	Schema einer Stichprobenuntersuchung	14
Abbildung 2:	Abgrenzung zwischen Probenahme und Analyse.....	15
Abbildung 3:	Probenahmeplanung im Untersuchungsablauf.....	16
Abbildung 4:	Notwendiger Stichprobenumfang no für unterschiedliche Variationskoeffizienten Varkoeff (xi) bei einer maximalen relativen Zufallsabweichung von 10 % für große Grundgesamtheiten (Die vorgegebene statistische Sicherheit beträgt 95 %.)	21
Abbildung 5:	Probenahmemethoden zur Bestimmung von Menge und Zusammensetzung von Abfällen	24
Abbildung 6:	Schema zur Auswahl der Stichprobenbehälter bei Haushalten bei einer mehrstufigen geschichteten Zufallsauswahl und die anschließende Klassifikation des Inhaltes	27
Abbildung 7:	Schematische Vorgehensweise der mehrstufigen Zufallsauswahl	28
Abbildung 8:	Schema zur Auswahl der Stichprobenbehälter bei Gewerbebetrieben bei einer mehrstufigen geschichteten Zufallsauswahl und die anschließende Klassifikation des Inhaltes	30
Abbildung 9:	Schema zur Auswahl der Einzelproben bei einer systematischen Zufallsauswahl am bewegten Band und die anschließende Klassifikation des Inhaltes	32
Abbildung 10:	Darstellung des Verfahrens der systematischen Zufallsauswahl bewegter Abfallströme vom Band.....	33
Abbildung 11:	Vergleich der grundlegenden Zufallsauswahlverfahren	38

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Größe des notwendigen Stichprobenumfangs in Abhängigkeit der relativen maximalen Zufallsabweichung und des natürlichen Variationskoeffizienten (Die vorgegebene statistische Sicherheit beträgt 95 %)	20
Tabelle 2:	Struktur der gemischten Abfälle aus den Herkunftsbereichen Haushalten und Gewerbe.....	25
Tabelle 3:	Stichprobenmassen der Eisen- und Nichteisenmetalle im Materialstrom einer Abfallbehandlungsanlage nach der Fe- und NE-Metallabscheidung	51
Tabelle 4:	Schichtungsmatrix	53
Tabelle 5:	Hochgerechnete Mengen Fe- und NE-Metalle nach Chargen – Angaben in [kg/Woche].....	54

Tabelle 6:	Hochgerechnete Mengen Fe- und NE-Metalle nach Chargen - Angaben in [%].....	54
Tabelle 7:	95 % Konfidenzintervalle der Mengen Fe- und NE-Metalle - Angaben in [kg/Woche].....	55
Tabelle 8:	95 % Konfidenzintervalle der Mengen Fe- und NE- Metalle - Angaben in [%].....	55
Tabelle 9:	Stichprobenergebnisse nach Stoffgruppen und Schichten	56
Tabelle 10:	Schichtungsmatrix	57
Tabelle 11:	Einteilung nach Auswahlstufen	57
Tabelle 12:	Hochgerechnete Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [Mg/Jahr].....	61
Tabelle 13:	Hochgerechnete Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [%]	62
Tabelle 14:	95 % Konfidenzintervalle der Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [Mg/Woche]	62
Tabelle 15:	95 % Konfidenzintervalle der Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [%].....	62
Tabelle 16:	Relative Fehleranteile der Stichprobenuntersuchung nach Stoffgruppen, Auswahlstufen und Schichten - Angaben in [%]	63
Tabelle 17:	Vergleich der Genauigkeit verschiedener Hochrechnungsmethoden - Angaben als Varianzen in [Mg ² /a ²]	64
Tabelle 18:	Durchschnittliche Raumdichten von Gewerbeabfall- Fahrzeugladungen in Berlin 1993/94 – Angaben in [kg/m ³]	67

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Erläuterung
Abf.	Abfall
ARGUS	ARGUS-Statistik und Informationssysteme in Umwelt und Gesundheit GmbH
CPB	Chemisch-physikalisch-biologisch
d. h.	das heißt
dm³	Kubikdezimeter
d₉₅	Ein in der Statistik und Qualitätskontrolle übliches Maß, das den Wert kennzeichnet, unterhalb dessen 95 % aller Messwerte einer Verteilung fallen
Fe	Eisen
g	Gramm
ggf.	gegebenenfalls
kg	Kilogramm
KW	Kalenderwoche
LAGA	Bund/Länder-Arbeitsgemeinschaft Abfall
LAGA PN 98	Richtlinie für das Vorgehen bei physikalischen, chemischen und biologischen Untersuchungen im Zusammenhang mit der Verwertung / Beseitigung von Abfällen
LfULG	Sächsisches Landesamt für Umwelt, Geologie und Landwirtschaft
LfU RIP	Landesamt für Umwelt Rheinland-Pfalz
m³	Kubikmeter
Mg	Megagramm
Mg²/a²	die Einheit für die Varianz
mm	Millimeter
NE	Nichteisenmetalle
OG	obere Grenze des Konfidenzintervalls mit 95 % Eintrittswahrscheinlichkeit
sonst.	Sonstige
u. a.	unter anderem
UG	untere Grenze des Konfidenzintervalls mit 95 % Eintrittswahrscheinlichkeit
Verpack.	Verpackungen
%	Prozent

Vorbemerkung

Der vorliegende Teilbericht 1 zum REFOPLAN Vorhaben „Konzeptentwicklung für regelmäßige, gebündelte Abfalluntersuchungen zum Monitoring ausgewählter Abfallströme“ beschreibt die methodischen Grundlagen zur Stichprobenplanung und Hochrechnung fester, gemischter Siedlungsabfälle. Er basiert auf zwei Artikeln, welche von Dr. Bertram Zwisele verfasst und in den Jahren 2005 und 2008 in zwei Teilen im Müllhandbuch unter den Titeln „Probenahmemethoden für die Bestimmung von Menge und Zusammensetzung fester Abfälle“, Kennzahl 1661, Lieferung 5/05 und „Auswertungsmethoden für die Bestimmung fester Abfälle“, Kennzahl 1681, Lieferung 3/08, veröffentlicht wurden.

Teil I umfasst die Stichprobenplanung und stammt aus dem Beitrag „Probenahmemethoden für die Bestimmung von Menge und Zusammensetzung fester Abfälle“ aus dem Müllhandbuch. Teil II beschäftigt sich mit der Hochrechnungsmethode und entspricht dem Beitrag „Auswertungsmethoden für die Bestimmung fester Abfälle“ aus dem Müllhandbuch.

Teil I - Probenahmemethoden

Die Probenahme ist ein integraler Bestandteil einer Abfalluntersuchung und nimmt maßgeblich Einfluss auf die Qualität der Ergebnisse. Fehler bei der Probenahme wirken sich gravierend auf die Untersuchungsergebnisse aus und können mitunter zu Abweichungen vom wahren Ergebnis von bis zu 1.000 Prozent (%) führen (Rasemann, 1993). Nur durch die Anwendung geeigneter Probenahmemethoden, die eine statistisch korrekte Probenahmeplanung und eine fachgerechte Ausführung der Entnahme von Proben vor Ort beinhalten, können repräsentative und vertrauenswürdige Ergebnisse gewonnen werden. Aufgabe der statistischen Probenahmeplanung ist es, den durch die Probenahme verursachten zufälligen Fehler (den unvermeidbaren Stichprobenfehler¹) angemessen klein zu halten. Aufgabe der fachgerechten Ausführung der Probenahme ist es, vermeidbare systematische Fehler weitgehend auszuschließen.

Aufgrund der Vielfältigkeit der Abfallarten, der unterschiedlichen Zusammensetzung und Beschaffenheit der Abfallgemische, der unterschiedlichen Entsorgungswege vom Erzeuger bis zur Verwertung/Beseitigung und der großen Anzahl unterschiedlichster Untersuchungsparameter ist eine einheitlich festgelegte Vorgehensweise bei der Probenahme nicht möglich. Gleichwohl können grundlegende Herangehensweisen für die Probenahme festgelegt und das jeweilige methodische Vorgehen beschrieben werden. Aus der Zielstellung einer Abfalluntersuchung und der Beschaffenheit der Abfallart (ihrer Heterogenität) ergeben sich unterschiedliche Vorgehensweisen für die Beprobung.

Die wichtigsten Untersuchungsparameter für die Charakterisierung von Abfällen sind die stoffliche Zusammensetzung, die Teilchengrößenverteilung und die chemisch-physikalisch-biologischen Eigenschaften. Die Beschaffenheit fester Abfälle bezüglich Stoffzusammensetzung, Teilchengrößen, Dichten, Teilchenformen, Teilchenoberflächen usw. umfasst ein sehr großes Spektrum. Abfälle werden aufgrund ihrer Beschaffenheit oder auch ihrer stark variierenden Zusammensetzung in heterogene Abfälle und homogene Abfälle unterschieden. Der Übergang ist fließend. Der Heterogenitätsgrad ist maßgebend für die Entwicklung geeigneter

¹ Da in einer Stichprobe keine vollständige Untersuchung aller Elemente stattfindet, bleibt eine Restunsicherheit (der unvermeidbare Stichprobefehler) bestehen.

Probenahmemethoden. Auf die quantitative Beschreibung der Heterogenität wird in Kapitel 1.3 näher eingegangen.

Für eine grobe Einteilung der Abfallarten nach ihrer Heterogenität wird die Teilchengröße herangezogen. Für Abfallarten mit großem Teilchengrößenspektrum ($d_{95} = 120$ Millimeter (mm)), das heißt (d. h.) der Massenanteil der Stoffteilchen größer 120 mm Durchmesser beträgt 5 %, müssen spezielle Probenahmemethoden angewandt werden. Diese Abfälle werden im Folgenden als heterogen stückige Abfälle bezeichnet und sind Gegenstand dieser Ausführungen. Die in der LAGA PN 98² (Bund/Länder-Arbeitsgemeinschaft Abfall (LAGA), 2001) beschriebenen Probenahmemethoden sind für heterogen stückige Abfallarten ($d_{95} = 120$ mm) nicht geeignet. In der LAGA PN 98 wird auf entsprechende Methoden in der „Richtlinie zur einheitlichen Abfallanalytik in Sachsen“ (Sächsisches Landesamt für Umwelt, Geologie und Landwirtschaft (LfULG), 2014) verwiesen, die sich aber im Wesentlichen auf die Behälterbeprobung von Hausmüll beschränken. Der vorliegende Fachbeitrag versucht, die Lücke in der Probenahmemethodik für heterogen stückige Abfallarten mit einem Teilchengrößenspektrum von $d_{95} = 120$ mm zu schließen.

Zu den heterogen stückigen Abfällen ($d_{95} = 120$ mm) zählen unter anderem (u. a.) der Restabfall aus Haushalten, hausmüllähnliche Gewerbeabfälle, Sperrmüll, Leichtverpackungsabfälle, gemischte Bau- und Abbruchabfälle, Sortierreste aus der Aufbereitung unterschiedlicher Abfallgemische und gemischte Gewerbeabfälle.

Die Vorgehensweise bei der Probenahme heterogener und homogener Abfallarten mit einem Teilchengrößenspektrum von $d_{95} < 120$ mm ist in der LAGA PN 98 (LAGA, 2001) beschrieben und wird darüber hinaus in einem eigenen Fachbeitrag im Müllhandbuch „Probenahmemethoden für die Bestimmung der chemisch-physikalisch-biologischen Eigenschaften fester Abfälle“ behandelt.

² Richtlinie für das Vorgehen bei physikalischen, chemischen und biologischen Untersuchungen im Zusammenhang mit der Verwertung / Beseitigung von Abfällen

1 Grundlagen der Abfallprobenahme

Die grundlegende Aufgabe der Probenahme ist es, eine Ausgangsmenge (statistischer Begriff: Grundgesamtheit), die in ihrer Gesamtheit aus ökonomischen und/oder technischen Gründen nicht vollständig untersucht werden kann, so zu reduzieren, dass aus der gewonnenen Teilmenge (statistischer Begriff: Stichprobe) zuverlässige Aussagen über die Ausgangsmenge gewonnen werden können. Allgemein formuliert stellt die Stichprobe einen Ausschnitt aus der Wirklichkeit dar und erlaubt einen Blick auf die Gesamtheit. Der Probenahmeprozess ist abhängig von der Zielstellung der Untersuchung, welcher gegebenenfalls (ggf.) durch Berichtspflichten definiert werden kann, und der Beschaffenheit oder Struktur der Grundgesamtheit.

1.1 Definition und Abgrenzung der Probenahme

Übergeordnet betrachtet ist die Probenahme ein Teilprozess innerhalb einer Untersuchung oder auch einer Datenerhebung. Ziel des gesamten Prozesses der Datenerhebung ist es, Informationen über einen realen Sachverhalt zu gewinnen. Die vollständige Beschreibung eines Probenahmeverfahrens beinhaltet die Probenahme, d. h. alle Auswahl- und Aufbereitungsschritte von der Entnahme einer „Primärstichprobe“ (= erster Zugriff auf die Grundgesamtheit) bis zur Übergabe einer Probenmenge für die Analyse, Aufbereitung der gewonnenen Probe, Analyse der Probe, Auswertung der Analysenergebnisse und Rückschluss der Stichprobenergebnisse auf die Grundgesamtheit. Die wesentlichen Schritte einer Stichprobenuntersuchung sind der Abbildung 1 zu entnehmen.

Abbildung 1: Schema einer Stichprobenuntersuchung

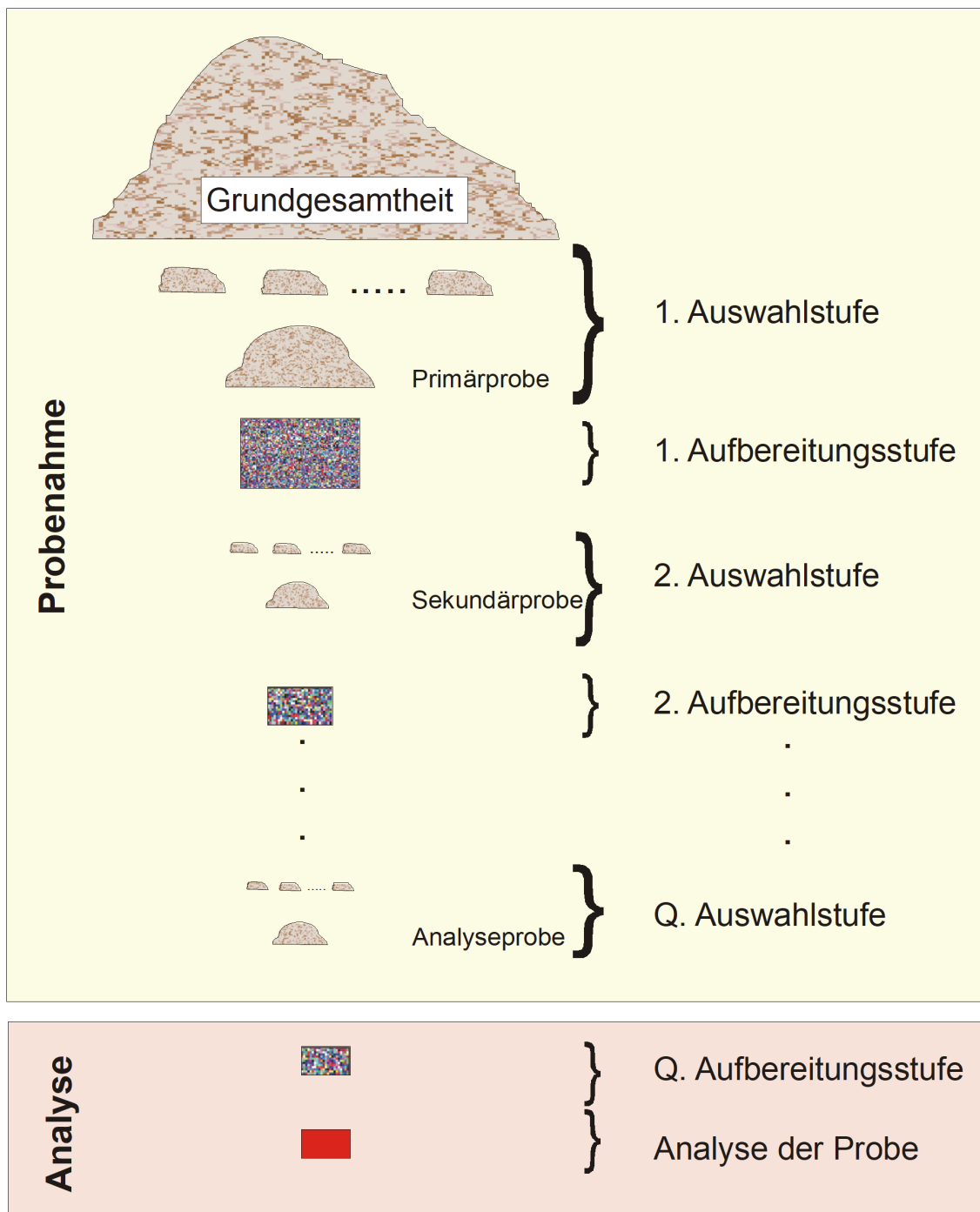


Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS (Statistik und Informationssysteme in Umwelt und Gesundheit GmbH)

Die Probenahme ist ein (Auswahl-)Prozess, der aus einer Grundgesamtheit eine bestimmte Teilmenge (Anzahl an Elementareinheiten, eine Masse, ein Volumen) nach einer festgelegten Auswahlvorschrift entnimmt. Eine Probe kann aus einer oder mehreren Teilmengen einer Grundgesamtheit bestehen.

Für Stoffsysteme muss der Auswahl immer ein Teilungsprozess vorweggehen. Aus der Analysenprobe wird das Untersuchungsmerkmal bestimmt. Die Analysenprobe darf keinen weiteren Teilungs- und Auswahlritten mehr unterliegen. Alle erforderlichen Aufbereitungsschritte bis zur Analysenprobe, wie zum Beispiel Mischen, Trennen (Klassieren, Sortieren), Zerkleinern und Agglomerieren gehören zur Probenahme. Aufbereitungsschritte, die mit der Probemenge zur Analyse durchgeführt werden, gehören zur Analyse. In Abbildung 2 ist die Abgrenzung des Probenahmeproganges schematisch dargestellt.

Abbildung 2: Abgrenzung zwischen Probenahme und Analyse



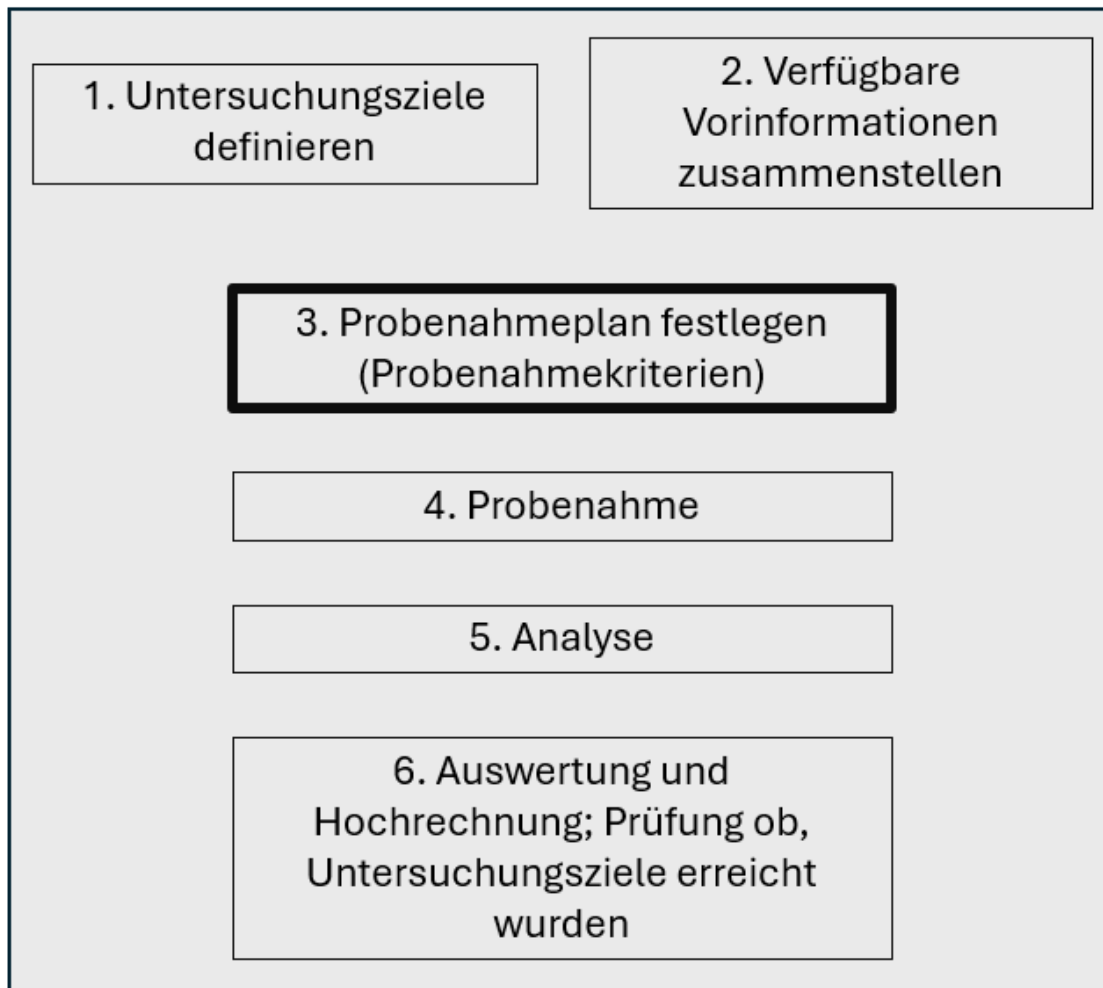
Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

1.2 Probenahmeplan und Probenahmekriterien

Nachdem die Probenahme im Kontext einer Untersuchung eingeordnet und der Probenahmevergang abgegrenzt wurde, wird nun auf die Probenahme selbst eingegangen. Der erste Schritt einer Stichprobenuntersuchung besteht, wie Abbildung 1 zu entnehmen, in der Entwicklung und Festlegung des Probenahmeplans. Der Probenahmeplan wird aus den Untersuchungszielen und den verfügbaren Vorinformationen entwickelt. Es müssen die grundlegenden Kriterien für eine repräsentative, zuverlässige und wirtschaftliche Probenahme

beachtet und eingehalten werden. In Abbildung 3 ist die Stellung der Probenahmeplanung im Untersuchungsablauf zu entnehmen (Nothbaum, 1997).

Abbildung 3: Probenahmeplanung im Untersuchungsablauf



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an (Nothbaum, 1997)

Zur Aufstellung des Probenahmeplans müssen folgende Kriterien und Fragestellungen beantwortet werden:

- Kann mit der geplanten Probenahme das angestrebte Untersuchungsziel beantwortet werden? Dazu müssen die Kriterien Repräsentativität, Suffizienz und Indikativität beachtet und eingehalten werden.

Repräsentativität: Liefert die Probenahme ein gutes Abbild der Grundgesamtheit oder ist mit Verzerrungen oder Über- bzw. Unterschätzungen zu rechnen?

Suffizienz: Wird die verfügbare Vorinformation ausgeschöpft? D. h. werden alle Parameter erfasst? Ist die Probengröße ausreichend für die Schätzung von Mittelwert und Varianz? Lassen sich Aussagen über räumliche und zeitliche Schwankungen treffen?

Indikativität: Erlauben Probenahme und Analyse den Nachweis signifikanter Grenzwertüberschreitungen? Sind die Summenparameter indikativ?

- ▶ Sind die Ergebnisse vertrauenswürdig? Dazu müssen die Kriterien Reliabilität, und Validität beachtet und eingehalten werden.

Reliabilität: Werden Probenahme-, Aufbereitungs- und Analysefehler quantifiziert? Können Störeinflüsse bei der Entnahme, dem Transport und der Lagerung der Proben ausgeschlossen werden?

Validität: Ist die Anzahl der erhobenen Parameter ausreichend? Wurden alle relevanten Störvariablen erfasst?

- ▶ Kann das angestrebte Wissen mit geringerem Aufwand gewonnen werden? Dazu muss das Kriterium Ökonomie beachtet und eingehalten werden.

Ökonomie: Kann eine Vollerhebung durch eine Teilerhebung ersetzt werden? Ist die gewählte Probenahmemethode (zufällig, geschichtet, systematisch) die effizienteste? Wird nur der notwendige Stichprobenumfang erhoben?

Die Probenahmekriterien sind bei der Entwicklung von Probenahmemethoden und Verfahren zu berücksichtigen. Aus ihrer Anwendung ergeben sich die für jede Probenahme maßgebenden Parameter:

- ▶ Auswahl der Zugriffsebene (d.h., an welcher Stelle im Entsorgungsprozess soll beprobt werden)
- ▶ Auswahl der Bezugsgröße (Volumen, Masse, angeschlossene Einwohner)
- ▶ Festlegung von Größe und Anzahl der Einzelproben (ergibt sich aus der Genauigkeitsanforderung und der Heterogenität des Abfalls)
- ▶ Festlegung von Größe und Anzahl der Mischproben und der daraus resultierenden Analyseproben (ergibt sich aus den Aufbereitungs- und Analysekosten)
- ▶ Verteilung der Proben nach sachlichen, örtlichen und temporären Gesichtspunkten durch Schichtung und mehrstufige Verfahren

1.3 Heterogenität und Homogenität

Abfälle werden in der Literatur mit den Begriffen Homogenität und Heterogenität beschrieben, die Begriffe sind wesentlich für das Verständnis der nachfolgend vorgestellten Probenahmemethoden und werden daher in diesem Kapitel allgemeinverständlich eingeführt.

Die Struktur oder die Beschaffenheit einer Grundgesamtheit lässt sich mit den Begriffen Heterogenität und Homogenität beschreiben. Heterogenität ist die Eigenschaft einer Grundgesamtheit, die Auskunft darüber gibt, wie stark die Merkmalsausprägungen der Elementareinheiten einer Grundgesamtheit variieren. Die Definition erfolgt über den statistischen Begriff der Varianz. Die Varianz ist ein Maß für die Abweichung der Messwerte von ihrem Erwartungswert. Damit ist die Varianz geeignet, Merkmalsunterschiede in Stoffsystemen zu beschreiben.

Nach einer wörtlichen Beschreibung wird nun die Heterogenität mathematisch definiert. Für die Einheiten einer Grundgesamtheit (= mathematisch Elementareinheit U_i) wird vorausgesetzt, dass sie nicht weiter teilbar und nicht veränderbar sind. Jeder Elementareinheit wird eine

objektbezogene Heterogenität zugeordnet. Die objektbezogene Heterogenität h_i wird wie in Gleichung 1 gezeigt definiert.

$$h_i = N_{UG} * \frac{a_i - a_{UG}}{a_{UG}} * \frac{m_i}{m_{UG}} \quad \text{Gleichung 1}$$

h_i	objektbezogene Heterogenität
N_{UG}	Anzahl der Stoffteilchen in der Untersuchungsgesamtheit
a_i	Anteil des interessierenden Merkmals im i -ten Stoffteilchen
a_{UG}	Anteil des interessierenden Merkmals in der Untersuchungsgesamtheit
m_i	Masse des i -ten Stoffteilchens
m_{UG}	Masse der Untersuchungsgesamtheit

Ein geeignetes Maß für die Quantifizierung der Gesamtheterogenität ist die Varianz der objektbezogenen Heterogenität h_i , welche in der folgenden Gleichung 2 dargestellt wird.

$$\text{var}(h_i) = N_{UG} \cdot \sum_{i=1}^{N_{UG}} \left[\frac{(a_i - a_{UG})}{a_{UG}} \cdot \frac{m_i}{m_{UG}} \right]^2 \quad \text{Gleichung 2}$$

Mithilfe der Varianz der objektbezogenen Heterogenität kann nun die Heterogenität einer Grundgesamtheit H_{UG} anhand Gleichung 3 berechnet werden.

$$H_{UG} = \text{var}(h_i) \geq 0 = N_{UG} * \sum_{i=1}^{N_{UG}} \left[\frac{a_i - a_{UG}}{a_{UG}} * \frac{m_i}{m_{UG}} \right]^2 \quad \text{Gleichung 3}$$

Wenn Gleichung 1 sowie die Gleichung 2 ein Ergebnis von 0 ergibt, ist die Grundgesamtheit vollkommen homogen. Dies trifft nur zu, wenn alle Elementareinheiten die gleiche Merkmalsausprägung besitzen. Alle Elementareinheiten sind in diesem Fall identisch.

Die Berechnung der Heterogenität nach Gleichung 2 ist in der Praxis nicht umsetzbar, da die Merkmalsausprägung a_i der i Stoffteilchen und die Stoffteilchenmassen m_i für große Grundgesamtheiten nicht bestimmt werden können. Um zu praktikablen Abschätzungen für die Heterogenität zu kommen, können die Merkmalsausprägung und die Stoffteilchenmassen in physikalischen Modellen über die Teilchengröße und Dichte (Gy, 1992) oder in statistischen Modellen über bestimmte Verteilungsannahmen (Blottnitz, 1999; Rasemann, 2000) bestimmt werden.

Ein Heterogenitätsmaß ist somit eine geeignete Größe zur Beschreibung der Beschaffenheit von Grundgesamtheiten. Die Heterogenität ist eine wesentliche und unvermeidbare Ursache für die Entstehung von Stichprobenfehlern und muss im Zusammenhang mit der Auswahl geeigneter Probenahmeverfahren betrachtet werden. Weitere Ausführungen zur mathematisch-statistischen Beschreibung der Heterogenität befinden sich in der Dissertation „Entwicklung einer neuen Probenahmemethode für heterogene Abfälle geringer Schüttdichte“ (Zwiesele, 2004).

1.4 Festlegung der notwendigen Stichprobenmenge

Ziel einer Stichprobenuntersuchung ist es, die Parameter der Grundgesamtheit ausreichend genau zu schätzen. Eine übergenaue Schätzung verursacht unnötige Kosten, da die Anzahl an Stichprobeneinheiten in der Regel maßgeblich die Kosten einer Stichprobenuntersuchung bestimmen. Hingegen führt eine zu ungenaue Schätzung dazu, dass das Ergebnis für einen vorgesehenen Zweck (z. B. Planungsgrundlage für eine Abfallbehandlungsanlage) nicht wie geplant herangezogen werden kann oder gar unbrauchbar wird.

Es handelt sich bei der Festlegung des notwendigen oder auch optimalen Stichprobenumfangs letztlich um eine Optimierungsaufgabe. Bei der Ermittlung des optimalen Stichprobenumfangs einer Untersuchung muss zuerst die Genauigkeitsanforderung an die zu erzielende Ergebnisse festgelegt werden.

1.4.1 Genauigkeitsanforderung

Die Genauigkeitsanforderung wird entsprechend der geforderten Untersuchungsqualität vor der Untersuchung festgelegt. Die Genauigkeitsanforderung an ein Messergebnis besagt, dass der aus den Stichprobenergebnissen ermittelte Parameter (auch Schätzparameter) um höchstens den Betrag ϵ_0 mit der Vertrauenswahrscheinlichkeit $1-\alpha$ vom wahren Wert der Grundgesamtheit abweichen darf. Wird als wahrer Wert der Grundgesamtheit der arithmetische Mittelwert betrachtet, ergibt sich Gleichung 4.

$$\left| \hat{X} - \mu \right| \leq \frac{\epsilon_0}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{Gleichung 4}$$

ϵ_0 absolute Genauigkeitsanforderung an ein Messergebnis

\hat{X} Schätzwert für das arithmetische Mittel

μ arithmetische Mittel der Grundgesamtheit (wahrer Wert)

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ Konfidenzkoeffizient der Standard-Normalverteilung für ein zweiseitiges Vertrauensintervall

Unter der Annahme, dass die Schätzfunktion erwartungstreu ist und damit der Bias (Verzerrung des Schätzwertes) entfällt, kann die Genauigkeit über die Varianz des geschätzten Mittels ausgedrückt werden, berechnet wird diese anhand der Gleichung 5.

$$\text{var}(\hat{X}) \leq \left(\frac{\epsilon_0}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \right)^2 \quad \text{Gleichung 5}$$

Wird nun in Gleichung 5 anstelle der Varianz des geschätzten arithmetischen Mittelwerts $\text{var}(\hat{X})$ die Varianz der Einzelwerte $\text{var}(x_i)$ eingesetzt, lässt sich die Mindestprobenanzahl n_0 mit Gleichung 6 berechnen.

$$n_0 \geq \left(\sqrt{\text{var}(x_i)} * \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\epsilon_0} \right)^2 \quad \text{Gleichung 6}$$

n_0 Mindestprobenanzahl

Die Voraussetzung der Anwendung von Gleichung 6 für die Berechnung des Stichprobenumfangs ist, dass die Mindestprobenanzahl n_0 um ein Vielfaches kleiner ist als die Anzahl der Einheiten in der Grundgesamtheit N .

Zur Ermittlung des erforderlichen Stichprobenumfangs muss also die Heterogenität der Grundgesamtheit H_{UG} , ausgedrückt über die Varianz der Einzelwerte $\text{var}(x_i)$, bekannt und die zulässige Abweichung des Mittelwertes vom wahren Wert ϵ_0 festgelegt werden. Weiterhin sind Kenntnisse über den Umfang der Grundgesamtheit N bzw. das Verhältnis von Anzahl der Stichprobeneinheiten n zu Anzahl der Einheiten in der Grundgesamtheit erforderlich.

Die zulässige Abweichung kann auch als relative Genauigkeitsanforderung formuliert werden, hierbei wird folglich die prozentuale Abweichung $\epsilon_{0,rel}$ verwendet. Die Varianz der Einzelwerte wird durch die relative Größe, den Variationskoeffizienten ersetzt. Die Mindestprobenanzahl berechnet sich dann mit Gleichung 7.

$$n_0 \geq \left(\sqrt{\text{varkoeff}(x_i)} * \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\epsilon_{0,rel}} \right)^2 \quad \text{Gleichung 7}$$

$\epsilon_{0,rel}$ relative Genauigkeitsanforderung an ein Messergebnis

Während die Genauigkeitsanforderung und die statistische Sicherheit Größen sind, welche in Abhängigkeit zu der erzielenden Genauigkeit der Untersuchung festgelegt werden, ist die Heterogenität einer Grundgesamtheit eine Art "Naturkonstante", welche anhand von Voruntersuchungen oder vergleichbaren Untersuchungen in der Vergangenheit bestimmt werden muss. Weitere Methoden zur Abschätzung der Heterogenität von Abfällen und damit zur Ermittlung des notwendigen Stichprobenumfanges, wie z. B. die Annahme bestimmter Messwertverteilungen sind im Artikel „Stichprobenverfahren für feste Siedlungsabfälle unter besonderer Berücksichtigung von Hausmüllsortierungen“ (Pohlmann, 1994) im Müllhandbuch beschrieben.

In Tabelle 1 sind die notwendigen Stichprobenumfänge für unterschiedliche Heterogenitätsgrade (hier ausgedrückt durch den Variationskoeffizienten) und sechs angenommene relative maximale Zufallsabweichungen berechnet.

Ist die Anzahl der Elemente in der Grundgesamtheit im Verhältnis zur Anzahl der Stichprobeneinheiten groß, so wird der notwendige Stichprobenumfang maßgeblich von der Heterogenität der Grundgesamtheit bestimmt. In Abbildung 4 ist die Abhängigkeit des Stichprobenumfanges vom Umfang der Grundgesamtheit bei einer vorgegebenen relativen Genauigkeitsanforderung von 10 % für drei ausgewählte Variationskoeffizienten (Maß für die Heterogenität) dargestellt. Es ist klar erkennbar, dass die Größe der Grundgesamtheit keinen Einfluss auf den notwendigen Stichprobenumfang nimmt. Anders ausgedrückt bedeutet das, dass Untersuchungsgebiete mit 400.000 und mehr Einwohnern mit demselben Stichprobenumfang wie kleine Untersuchungsgebiete mit weniger als 50.000 Einwohnern untersucht werden können.

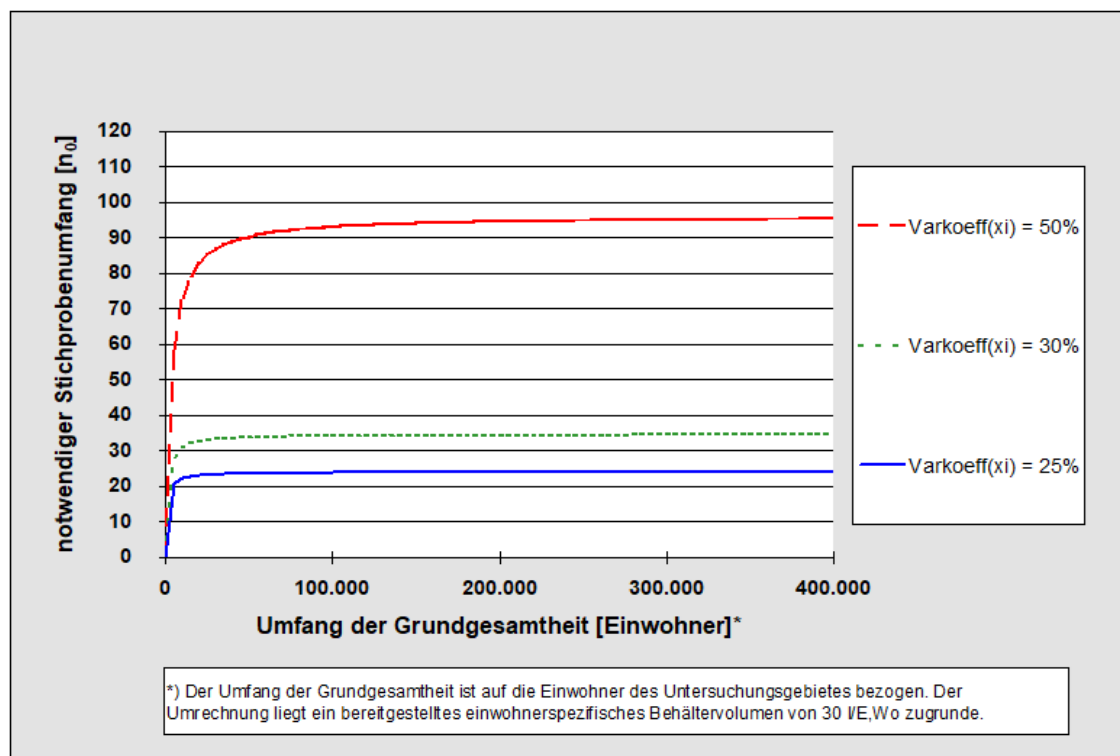
Tabelle 1: Größe des notwendigen Stichprobenumfangs in Abhängigkeit der relativen maximalen Zufallsabweichung und des natürlichen Variationskoeffizienten (Die vorgegebene statistische Sicherheit beträgt 95 %)

Variationskoeffizient varkoeff(x_i) (Maß für die Heterogenität der Grundgesamtheit)	Relative maximale Zufallsabweichung: 2,5%	Relative maximale Zufallsabweichung: 5%	Relative maximale Zufallsabweichung: 10%	Relative maximale Zufallsabweichung: 15%	Relative maximale Zufallsabweichung: 20%	Relative maximale Zufallsabweichung: 30%
15%	138	35	9	4	2	1
20%	246	61	15	7	4	2
25%	384	96	24	11	6	3
30%	553	138	35*	15	9	4
35%	753	188	47	21	12	5
40%	983	246	61	27	15	6
45%	1.245	311	78	35	19	9
50%	1.537	184	96	43	24	11
55%	1.859	465	116	52	29	13

Variationskoeffizient varkoeff(x_i) (Maß für die Heterogenität der Grundgesamtheit)	Relative maximale Zufallsabweichung: 2,5%	Relative maximale Zufallsabweichung: 5%	Relative maximale Zufallsabweichung: 10%	Relative maximale Zufallsabweichung: 15%	Relative maximale Zufallsabweichung: 20%	Relative maximale Zufallsabweichung: 30%
60%	2.213	553	138	61	35	15
70%	3.012	753	188	84	47	21
80%	3.934	983	246	109	61	27
90%	4.979	1.245	311	138	78	35
100%	6.147	1.537	384	171	96	43
120%	8.851	2.213	553	246	138	61
140%	12.047	3.012	753	335	188	84
160%	15.735	3.934	983	437	246	109
200%	24.589	6.147	1.537	683	384	171

*) Bei einem üblichen Variationskoeffizienten für Siedlungsabfall von 30% und einer relativen Zufallsabweichung von 10% ergibt sich ein notwendiger Stichprobenumfang von 35.

Abbildung 4: Notwendiger Stichprobenumfang n_o für unterschiedliche Variationskoeffizienten Varkoeff (x_i) bei einer maximalen relativen Zufallsabweichung von 10 % für große Grundgesamtheiten (Die vorgegebene statistische Sicherheit beträgt 95 %)



Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

Der notwendige Stichprobenumfang hängt weiterhin vom eingesetzten Stichprobenverfahren ab. Geschichtete Modelle oder Modelle mit Verhältnisschätzung führen im Allgemeinen zu einer Varianzreduktion gegenüber dem Modell der einfachen Zufallsauswahl. Das bedeutet, dass die Ermittlung des Stichprobenumfangs für die einfache Zufallsauswahl als obere Schranke oder maximal notwendiger Stichprobenumfang für die Beprobung von Abfällen mit weitergehenden Stichprobenmethoden (Kapitel 2) angesehen werden kann.

Weitere grundlegende Ausführungen zur Probenahme, wie die Auswahl der optimalen Zugriffsebene, die Anzahl und Größe der Stichprobeneinheiten, der Einfluss der Schichtung und der Einfluss jahreszeitlicher Schwankungen auf die Probenanzahl, sind dem Müllhandbuchbeitrag „Statistische Gesichtspunkte bei der Auswahl von Stichprobeneinheiten für Hausmülluntersuchungen“ (Zwisele, 1998) zu entnehmen.

Nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen der Abfallprobenahme wird die Vorgehensweise bei der Planung und Durchführung von Abfallproben für heterogen stückige Abfallarten (gemischte Abfallarten und Mono-Abfallarten) beschrieben. Die Beachtung der wesentlichen Prinzipien der statistischen Probenahmeplanung und der fachgerechten praktischen Ausführung können zu einer deutlichen Verbesserung der Untersuchungsqualität von Stoffströmen in der Abfallwirtschaft beitragen.

2 Planung und Durchführung der Abfallprobenahme

Abfalleigenschaften, wie die Teilchengrößenverteilung, die stoffliche Zusammensetzung und die chemisch-physikalisch-biologischen Merkmale können nur durch eine repräsentative Untersuchung auf Stichprobenbasis ermittelt werden. Aufgrund unterschiedlicher Zielstellungen abfallwirtschaftlicher Untersuchungen und großer Unterschiede in der Heterogenität der Merkmalsausprägungen der Abfälle ist eine einheitliche Vorgehensweise bei der Probenahme nicht möglich. Für jede Beprobung muss ein abfallbezogener Ansatz unter Einbeziehung aller Vorinformationen entwickelt werden. Ein abfallbezogener Ansatz berücksichtigt mindestens eine Unterteilung nach:

- ▶ Heterogenität der Abfälle
- ▶ Zugriffsmöglichkeiten im Entsorgungsprozess

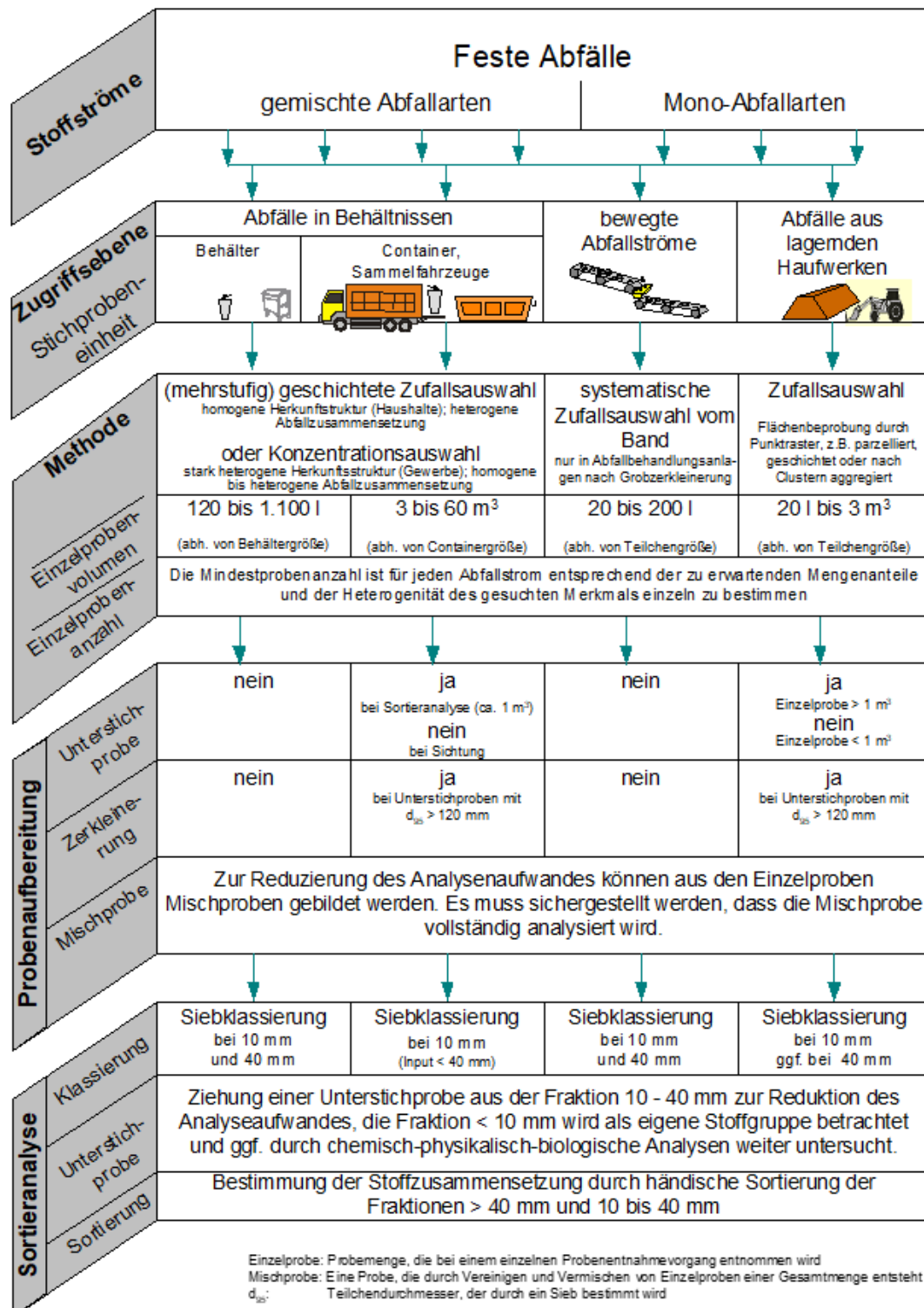
Der Teilbericht behandelt die Probenahmemethoden für heterogen stückige Abfälle ($d_{95} = 120 \text{ mm}$). Diese Abfallarten können nach ihrer Anzahl an unterschiedlichen Stoffgruppen weiterhin in gemischte Abfallarten und Mono-Abfallarten unterschieden werden. Mono-Abfallarten liegen vor, wenn der Abfall aus einer Stoffgruppe (z. B. Holz) mit geringen Verunreinigungen besteht. Mono-Abfallarten sind beispielsweise produktionsspezifische Abfälle aus dem gewerblichen Bereich oder getrennt erfasste sortenreine Wertstoffe (Glas, Papier) aus dem häuslichen Bereich. Gemischte Abfallarten bestehen aus mehreren Stoffgruppen. Dazu zählen beispielsweise gemischte Gewerbeabfälle oder Restabfall aus Haushaltungen und Geschäften. Innerhalb dieser Gruppen muss die Probenahmemethode entsprechend der Heterogenität der Abfallart weiter angepasst werden. So ergeben sich z. B. für Hausmüll und Gewerbeabfälle (beides heterogene gemischte Abfälle) unterschiedliche Methoden.

Ein weiterer wesentlicher Gesichtspunkt für die Auswahl geeigneter Probenahmemethoden ist die Zugriffsebene für die Entnahme von Abfallproben. Abfälle bewegen sich entlang einer Behandlungskette vom Abfallerzeuger/Verursacher über die Beförderer zu Behandlungs- und Verwertungsanlagen zur endgültigen Entsorgung. Je nach örtlicher Gegebenheit und Untersuchungsziel muss die geeignetste Zugriffsebene für eine Probenahme festgelegt werden. Dazu kommen folgende Zugriffsmöglichkeiten in Betracht:

- ▶ aus Sammel-Behältnissen (Abfallbehälter am Grundstück, Wechselcontainer oder Sammelfahrzeuge)
- ▶ vom Band (aus bewegten Abfallströmen an Behandlungs- und Verwertungsanlagen)
- ▶ aus ruhenden Haufwerken (z. B. Kompostmieten) oder aus Ablagerungen (z. B. Deponien oder Altlasten)

In Abbildung 5 sind die grundlegenden Methoden der Probenahme und der Probenaufbereitung bis zur Übergabe in ein Labor dargestellt. Die Auswahl einer geeigneten Probenahmemethode ergibt sich aus der Heterogenität der Abfallart und der Zugriffsmöglichkeit bei der Probenahme.

Abbildung 5: Probenahmemethoden zur Bestimmung von Menge und Zusammensetzung von Abfällen



Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

Eine detaillierte Handlungsanweisung zur Probenahme fester Abfälle ist aufgrund der Vielfalt der Abfallarten, unterschiedlicher Herkunftsbereiche und unterschiedlicher Entsorgungsstrukturen nicht möglich. Für die Akteure von Abfalluntersuchungen wird nachfolgend die methodische Vorgehensweise der Abfallprobenahme zur Bestimmung der

stofflichen Zusammensetzung und der Teilchengrößenverteilung vorgestellt. Es werden praktische Hinweise und Orientierungswerte zur Probengröße, Probenanzahl und zur Probenaufbereitung gegeben. Der Beitrag zeigt einen Handlungsrahmen auf, innerhalb dessen die Planung und Ausführung der Probenahme von qualifizierten Unternehmen mit geschultem Fachpersonal vorgenommen werden sollte.

2.1 Probenahme gemischter Abfallarten

Gemischte Abfallarten entstehen durch die Entsorgung verschiedener Materialien oder Stoffgruppen in gemeinsamen Behältnissen und können in allen Herkunftsbereichen anfallen. Durch die Vermischung entstehen in der Regel sehr heterogene Stoffgemische, welche sich aus vielen unterschiedlichen Bestandteilen (Stoffteilchen und Stoffgruppen) zusammensetzen. Die Stoffteilchen variieren wiederum nach Stoffart, Größe, Dichte, Form, Oberflächenbeschaffenheit etc. und können einzeln oder verknäuelte vorliegen. Aus gemischt anfallenden Abfällen können häufig mehr als 30 verschiedene Stoffgruppen identifiziert werden. Hinzu kommt, dass das Spektrum der Teilchengrößen gemischter Abfallarten aufgrund der Herkunftsstruktur vom mm - Bereich (Staubpartikel) bis zu Bestandteilen im Bereich von einem Meter (z. B. Teppiche oder Teile von Möbelstücken) reichen kann.

Für die Entwicklung geeigneter Probenahmestrategien muss mindestens nach den Herkunftsbereichen aus Haushalten und aus Gewerbe unterschieden werden. Während sich die Abfälle aus verschiedenen Haushalten bezüglich ihrer Zusammensetzung ähneln, kann dies für Abfälle aus Gewerbebetrieben nicht angenommen werden. Für Gewerbeabfälle ist mit Ausnahme von sortenreinen produktionspezifischen Abfällen (homogenen Zusammensetzungen) mit heterogenen Zusammensetzungen innerhalb der Behälter und zwischen verschiedenen Behältern zu rechnen. Eine Übersicht über jene Aussage ist in Tabelle 2 gegeben. Daraus ergeben sich unterschiedliche Herangehensweisen und Probenahmestrategien. Die Probenahme gemischter Abfälle zählt zu den schwierigsten Aufgabenfeldern in der Probenahme fester Stoffsysteme.

Tabelle 2: Struktur der gemischten Abfälle aus den Herkunftsbereichen Haushalten und Gewerbe

Struktur	Abfälle aus Haushalten	Abfälle aus Gewerbebetrieben
Innerhalb der Behälter	Heterogen	Heterogen
Zwischen den Behältern	Homogen	Heterogen

2.1.1 Probenahme gemischter Abfallarten aus Sammelbehältnissen

2.1.1.1 Aus Haushalten

Gemischte Abfälle aus Haushalten sind dadurch gekennzeichnet, dass die Abfallzusammensetzung in einem Abfallbehälter ein großes Spektrum verschiedenster Stoffarten und Stoffgruppen (Produkte) umfasst. Die Abfallzusammensetzung, die Teilchengrößenverteilung und die Verteilung der Untersuchungsmerkmale ist extrem heterogen.

Vergleicht man hingegen die Abfallzusammensetzungen aus verschiedenen Abfallbehältern, so ist festzustellen, dass sich die Abfallzusammensetzungen zwischen den Behältern ähneln. Dies

ist darauf zurückzuführen, dass jedem Abfallbehälter Haushalte zugeordnet sind, die wiederum ähnliche Verbrauchergewohnheiten besitzen und damit auch ähnliche Abfälle produzieren.

Bezüglich eines Untersuchungsmerkmals streuen die Messwerte folglich innerhalb eines Behälters stark und zwischen verschiedenen Behältern schwach. Wird jeweils der gesamte Inhalt eines Behälters untersucht, verursacht die geringe Streuung zwischen den Behältern einen vergleichsweise geringen Probenahmefehler. In der Statistik wird diese Vorgehensweise als Klumpenstichprobe bezeichnet. Dieser Effekt kann aber nur genutzt werden, wenn die Abfallbehälter am Grundstück beprobt werden. Werden die Behälterinhalte z. B. in einem Sammelfahrzeug vermischt und daraus wiederum Teilproben gezogen, ist aufgrund der großen Streuung innerhalb der Fahrzeugladung mit größeren Probenahme Fehlern zu rechnen.

Die nachfolgend beschriebene Methode der Probenahme gemischter Abfallarten aus Sammelbehältnissen basiert also wesentlich auf dem beschriebenen Klumpeneffekt.

Die Herausforderung bei der Probenahme gemischter Abfallarten besteht darin, aus einer extrem heterogenen und großen Gesamtmenge eine Probemenge zur Bestimmung der Teilchengrößenverteilung und der stofflichen Zusammensetzung von ca. drei bis sechs Megagramm (Mg) (Stichprobe für die Klassier- und Sortieranalyse) bzw. für die chemisch-physikalisch-biologische Analyse von weniger als einem Kilogramm (kg) (Stichprobe für die chemisch-physikalisch-biologische (CPB) - Analyse) zu entnehmen. Die Lösung kann nur in einer Probenahmemethode liegen, welche in einem mehrstufigen Prozess und unter Einbeziehung umfangreicher Vorkenntnisse über die Grundgesamtheit die gesamte Untersuchungsmenge Schritt für Schritt reduziert. Dabei muss jeder Teilungsschritt repräsentativ und der unvermeidbare Teilungsfehler quantifizierbar sein.

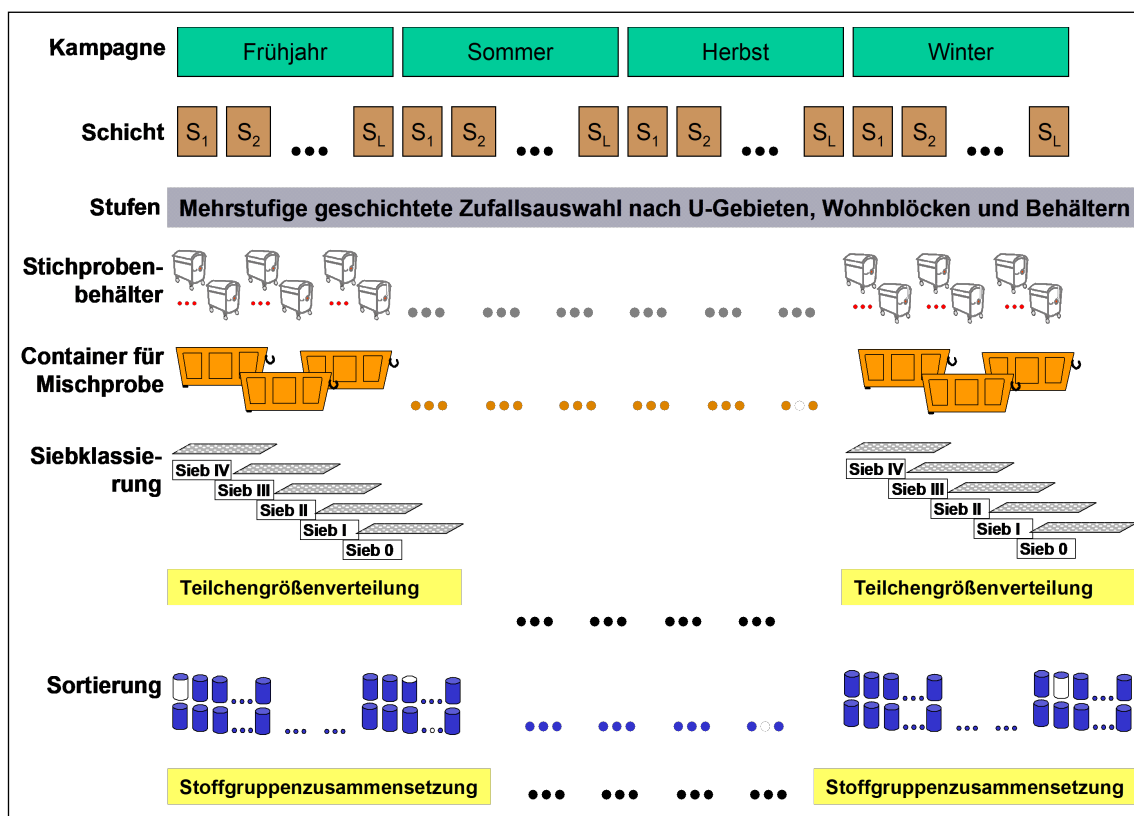
Subjektive Einflüsse durch den Probennehmer müssen, soweit wie möglich ausgeschlossen werden. Dies wird u. a. dadurch erreicht, dass die Probenahme der Abfälle am Grundstück durch Entleerung oder Austausch der Abfallbehälter erfolgt. Damit wird eine Teilung der heterogenen Abfallmenge, die z. B. bei der Beprobung einer Fahrzeugladung stattfindet, vermieden. Für die Bestimmung der Teilchengrößenverteilung und der Zusammensetzung wird jeweils der gesamte Inhalt eines Probebehälters analysiert.

Für die Analyse der CPB - Merkmale müssen aus einem Probebehälter weitere Teilproben entnommen werden. Im Verlauf der Probenreduzierung muss strengstens darauf geachtet werden, dass Unterstichproben nur von Teilfraktionen mit Teilchen kleiner als 120 mm Durchmesser (d_{95}) gezogen werden. Die Probenahme von Teilmengen sollte möglichst vom Band und nicht aus dem Haufwerk erfolgen. Heterogene Grobgemische mit Teilchen größer als 120 mm Durchmesser müssen vor der weiteren Probenteilung zwingend zerkleinert und homogenisiert werden.

Für die Gewinnung von Laborproben (Rasemann, 1993) für die Untersuchung der chemisch-physikalisch-biologischen Merkmale hat sich die Sortierung einer Abfallprobe nach Stoffgruppen, die Zerkleinerung der einzelnen Stoffgruppen auf eine Teilchengröße kleiner 2 mm und die Herstellung einer Mischprobe aus den zerkleinerten Stoffgruppen gemäß der Stoffgruppenzusammensetzung der Ausgangsprobe bewährt. Eine subjektive Probenahme aus einem ruhenden Haufwerk mit Teilchengrößen von bis zu 1.000 mm ist aus methodischen Gründen abzulehnen. Die Vorgehensweise bei der Probennahme und -aufbereitung zur Herstellung von Laborproben für CPB - Untersuchungen wird im Müllhandbuch „Probenahmemethoden für die Bestimmung der chemisch-physikalisch-biologischen Eigenschaften fester Abfälle“ ausführlich beschrieben (Rasemann & Herbst, 2005).

Ein geeignetes Verfahren zur Untersuchung von Restabfall aus Haushaltungen ist die mehrstufige geschichtete Zufallsauswahl. Hierbei werden mehrere Probenahmeporgänge (Unterstichproben) nacheinander ausgeführt. Die mehrstufige geschichtete Zufallsauswahl zur Bestimmung von Menge und Zusammensetzung von Siedlungsabfällen wurde bislang mit großem Erfolg angewandt (ARGUS, 1997; ARGUS, 2003; Bauer, 1977; Bauer 1980; Dornbusch et al., 2020; Landesumweltamt Brandenburg, 1998; Landesamt für Umwelt Rheinland-Pfalz (LfUIG), 1998; LfUIG, 2014; LfUIG, 2022). Anzahl und Größe der Probeneinheiten wurden empirisch auf Basis von vorangegangenen Abfalluntersuchungen festgelegt (Zwisele, 1998). In Abbildung 6 ist das Probenahmekonzept für gemischte feste Siedlungsabfälle durch eine mehrstufige geschichtete Zufallsauswahl von Sammelbehältnissen zu entnehmen.

Abbildung 6: Schema zur Auswahl der Stichprobenbehälter bei Haushalten bei einer mehrstufigen geschichteten Zufallsauswahl und die anschließende Klassifikation des Inhaltes

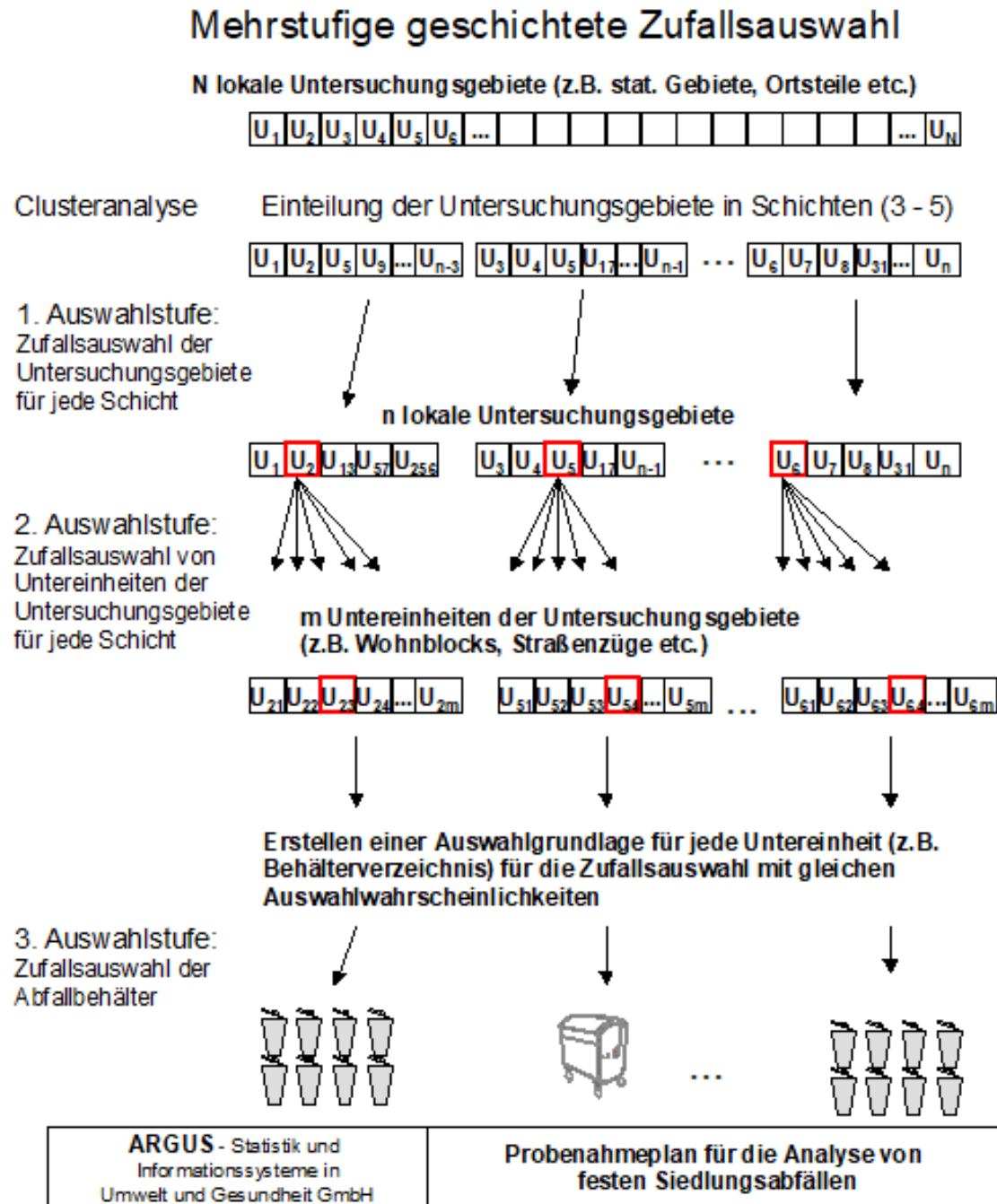


Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

Bei der mehrstufigen geschichteten Zufallsauswahl wird zunächst das gesamte Untersuchungsgebiet in sogenannte Schichten nach Nutzungs- und Bebauungsstruktur, Abfallerfassungssystem und ggf. weitere sozio-ökonomischen Faktoren gruppiert. Die Zuordnung zu Schichten ergibt sich aus Informationen und Ergebnissen von Voruntersuchungen zum jeweiligen Untersuchungsgebiet. Nach der Gruppierung in Schichten werden im ersten Auswahlschritt der Mehrstufigkeit aus jeder Schicht lokale Gebiete (statistische Gebiete, Ortsteile oder Bezirke) mit verfügbaren Informationen zur Entsorgungs- und sozio-ökonomischen Struktur ausgewählt. Im zweiten Auswahlschritt werden aus den ausgewählten lokalen Gebieten zufällig Untereinheiten der lokalen Gebiete (Wohnblocks, Straßenzüge, oder ähnliches) gezogen. Im dritten Auswahlschritt werden für die ausgewählten lokalen Untereinheiten in der Stichprobe die Abfallbehälter durch Zufallsauswahl bestimmt. Um eine

repräsentative Beprobung zu gewährleisten, sind für jede Auswahlstufe gleiche Auswahlwahrscheinlichkeiten zu gewährleisten. Abbildung 7 ist die schematische Vorgehensweise der mehrstufigen Zufallsauswahl zu entnehmen.

Abbildung 7: Schematische Vorgehensweise der mehrstufigen Zufallsauswahl



Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

Die mehrstufige Vorgehensweise ermöglicht es, den Planungsaufwand für die Stichprobe ökonomisch zu bewältigen. Behälterverzeichnisse für die Auswahl der Abfallbehälter müssen nur für lokale Untereinheiten (z. B. Wohnblöcke) bereitgestellt werden. Mit dieser mehrfach erprobten Methode kann das Abfallaufkommen und die Abfallzusammensetzung nach

Stoffgruppen sowie die Teilchengrößenverteilung mit zuverlässiger Genauigkeit bestimmt werden und ebenfalls Proben für die chemisch-physikalisch-biologischen Eigenschaften gewonnen werden.

Der erforderliche Untersuchungsumfang ergibt sich aus der Heterogenität des Abfallstroms. Um die Gesamtmenge und die wichtigsten Stoffgruppen mit einer Genauigkeit von $\pm 10\%$ und einer Sicherheit von 95% vorhersagen zu können, wird die erforderliche Anzahl an Stichprobeneinheiten bestimmt. Der notwendige Stichprobenumfang berechnet sich nach den in Kapitel 1.4, Gleichung 7, beschriebenen Beziehungen. Für die Berechnung muss die Heterogenität (ausgedrückt über den Variationskoeffizienten) des Abfalls aus vorherigen Untersuchungen bekannt sein oder abgeschätzt werden. Übliche Variationskoeffizienten für Siedlungsabfälle liegen je nach Abfallart zwischen 0,3 und 0,6 (Zwiesele, 1998).

2.1.1.2 Aus Gewerbebetrieben

Gemischte Abfälle aus Gewerbebetrieben sind dadurch gekennzeichnet, dass die Abfallzusammensetzung in einem Abfallbehälter ein großes Spektrum an verschiedenen Stoffarten und Produkten umfasst. Hinzu kommt, dass die Teilchengrößenverteilung aufgrund der großen Sammelbehälter (Container mit bis zu 60 Kubikmeter (m^3) Volumen) ebenfalls stark variiert. Die Anzahl verschiedener Stoffgruppen ist zwar meistens geringer als bei gemischten Abfällen aus Haushalten, die Abfallzusammensetzung innerhalb der Abfallbehälter schwankt jedoch noch erheblich.

Abfall aus Abfallbehältern von verschiedenen Gewerbebetrieben unterscheiden sich in deren Abfallzusammensetzung stark. Dies ist darauf zurückzuführen, dass jeder Gewerbebetrieb eigene spezifische Betriebs-, Produktions- und Entsorgungsstrukturen besitzt, welche zu unterschiedlichen Abfallzusammensetzungen führen.

Bezüglich eines Untersuchungsmerkmals streuen die Messwerte folglich sowohl innerhalb eines Behälters als auch zwischen verschiedenen Behältern stark. Um die starke Streuung zwischen verschiedenen Behältern zu berücksichtigen, müssen möglichst viele Behälter in die Stichprobenuntersuchung einbezogen werden. Zusätzlich sind die Behälterinhalte aufgrund deren Heterogenität vollständig zu untersuchen. Damit wird deutlich, dass aufgrund der großen Behältervolumina in der Gewerbeabfallentsorgung und der großen Anzahl an Stichprobeneinheiten, eine ökonomisch vertretbare Probenahme nach der für Haushalte beschriebenen Methode nicht in Frage kommt.

Abfälle aus Gewerbebetrieben sind sowohl bezüglich ihrer Stoffgruppenzusammensetzung innerhalb einer Abfallanlieferung (Fahrzeugladung oder Abfallcontainer) als auch zwischen verschiedenen Abfallanlieferungen stark heterogen. Um den Stichprobenfehler gering zu halten ist es daher erforderlich, eine möglichst große Anzahl an Abfallanlieferungen vollständig zu untersuchen.

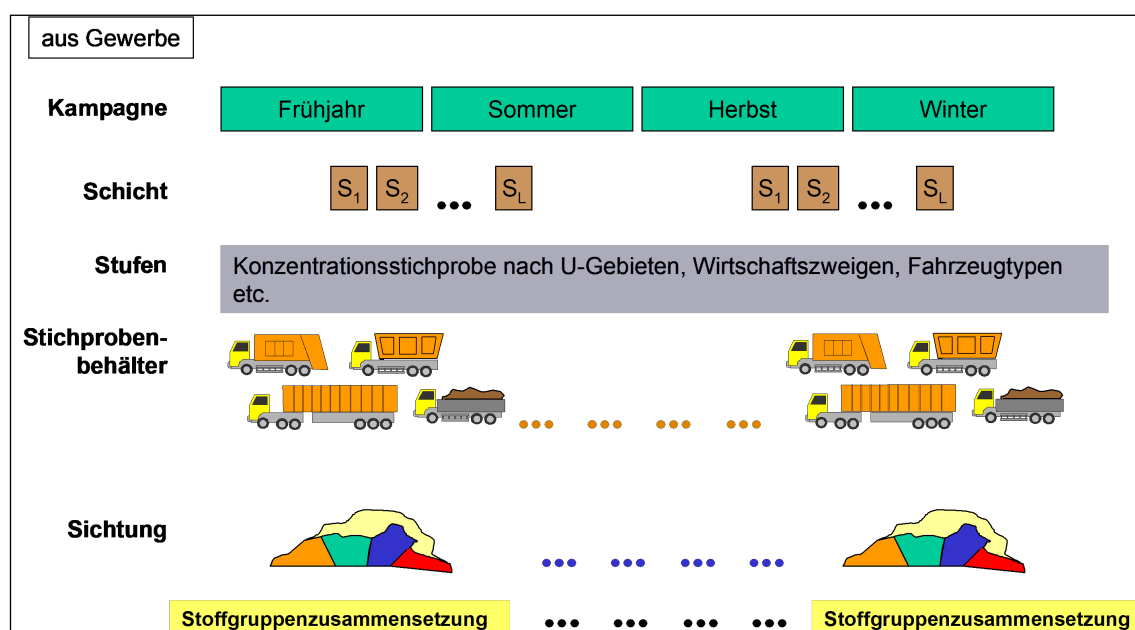
Eine Möglichkeit besteht darin, die aufwändige Sortierung für die Bestimmung der stofflichen Zusammensetzung durch die einfachere aber wesentlich ungenauere Sichtung (optische Klassifikation) zu ersetzen. Die Zusammensetzung muss innerhalb weniger Minuten geschätzt werden, daher wird es möglich einen sehr großen Stichprobenumfang zu untersuchen.

In der Statistik wird diese Vorgehensweise als Konzentrationsstichprobe bezeichnet. Nach dieser Methode werden möglichst alle mengenmäßig relevanten Abfallbehälter aus Gewerbebetrieben (z. B. alle Behälter mit einem Abfallvolumen $> 6 \text{ m}^3$) untersucht. Die Untersuchung von Abfallanlieferungen mit großen Abfallmengen haben Vorrang. Kleinere Einheiten werden nach dem Zufallsprinzip untersucht. Es soll ein Anteil von mindestens 80% der angelieferten Abfallmasse in die Untersuchung einbezogen werden.

Diese Methode ist nur für die Bestimmung der stofflichen Zusammensetzung, nicht aber für die Bestimmung von Teilchengrößenverteilung oder für CPB- Untersuchungen geeignet.

Das Konzept der Konzentrationsauswahl zur Beprobung von Gewerbeabfällen aus Sammelbehältnissen ist in Abbildung 8 schematisch dargestellt. Zur Berücksichtigung jahreszeitlicher Einflüsse sollten mindestens zwei Kampagnen vorgesehen werden. Eine Schichtung nach Behälter/Containerarten ist aufgrund der unterschiedlichen Abfallverdichtung in den Systemen erforderlich. Es muss mindestens nach Umleercontainer, Wechselcontainer, Presscontainer und sonstige Container unterschieden werden. Eine Einzelprobe ist jeweils die gesamte Abfallmenge eines Containers. Die Stoffgruppenzusammensetzung wird daher für die gesamte Abfallmenge eines Containers durch Sichtung bestimmt.

Abbildung 8: Schema zur Auswahl der Stichprobenbehälter bei Gewerbebetrieben bei einer mehrstufigen geschichteten Zufallsauswahl und die anschließende Klassifikation des Inhaltes



Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

2.1.2 Probenahme gemischter Abfälle aus bewegten Abfallströmen vom Band

Der überwiegende Anteil fester Abfälle durchläuft Verbrennungs-, Verwertungs- oder Aufbereitungsanlagen. Eine weitere Möglichkeit zur Entnahme von Abfallproben entlang dieser Entsorgungswege wird damit geschaffen.

Die **Vorteile** einer Abfallbeprobung an Anlagen, die zweckmäßigerweise an den Outputströmen (Produkten) vorgenommen werden sollte, liegen in:

- ▶ der Homogenisierung der Stoffströme durch chemische Prozesse (z. B. bei der Verbrennung) oder durch rein mechanische Prozesse (z. B. Zerkleinern, Klassieren, Sortieren und Mischen),
- ▶ der guten Zugriffsmöglichkeit auf die Grundgesamtheit durch die Entnahme von Proben vom Band,
- ▶ der Verringerung des logistischen Aufwandes gegenüber der Probenahme aus Behältern.

Die **Nachteile** einer Abfallbeprobung an Anlagen liegen darin, dass:

- ▶ feste Abfälle, die einer Verbrennung ohne vorherige Aufbereitung zugeführt werden, nur zur Bestimmung der chemischen Zusammensetzung beprobt werden können
- ▶ einzelne Abfallarten nicht oder nur mit erheblichem Aufwand (geänderte Anlagenbeschickung) getrennt beprobt werden können
- ▶ eine Schichtung nach gebietsspezifischen, behälterspezifischen oder sozio-ökonomischen Gesichtspunkten nicht oder nur mit erheblichem Aufwand durchgeführt werden kann
- ▶ die über Sortieranlagen bestimmten Stoffgruppenmengen unterscheiden sich von den durch manuelle Sortierung bestimmten Stoffgruppenmengen dadurch, dass diese um Sortierverluste entfrachtet sind.

Wird der Weg der Anlagenbeprobung gewählt, ist zunächst zu prüfen, welche Anlagen für die Untersuchung eines Entsorgungsgebietes berücksichtigt werden müssen. Im einfachsten Fall wird die gesamte zu untersuchende Abfallmenge an eine Anlage angeliefert und kann dort beprobt werden.

Wird ein größeres Einzugsgebiet (z. B. ein Bundesland) betrachtet, muss eine Anlagenauswahl analog der mehrstufigen Vorgehensweise in Kapitel 2.1.1 erfolgen. Im nächsten Schritt müssen alle Outputströme einer Anlage identifiziert und in die Untersuchung einbezogen werden. Für jeden Outputstrom müssen Einzelproben (möglichst vom Band) entnommen und zu Sammelproben vereinigt werden.

Die Probenahme vom Band ist für mineralische Schüttgüter und für produktionsspezifische Abfälle Stand der Technik. Dabei gelten folgende wesentliche Forderungen:

- ▶ die Probenahme sollte zweckmäßigerweise an Bandübergabestellen (Bandabwürfe) erfolgen,
- ▶ eine Einzelprobe sollte den gesamten Querschnitt des Bandes berücksichtigen,
- ▶ die Probenahme sollte erst nach einem angemessenen Vorlauf gestartet werden,
- ▶ die Einzelproben werden in jeweils gleichen Zeitabständen entnommen.

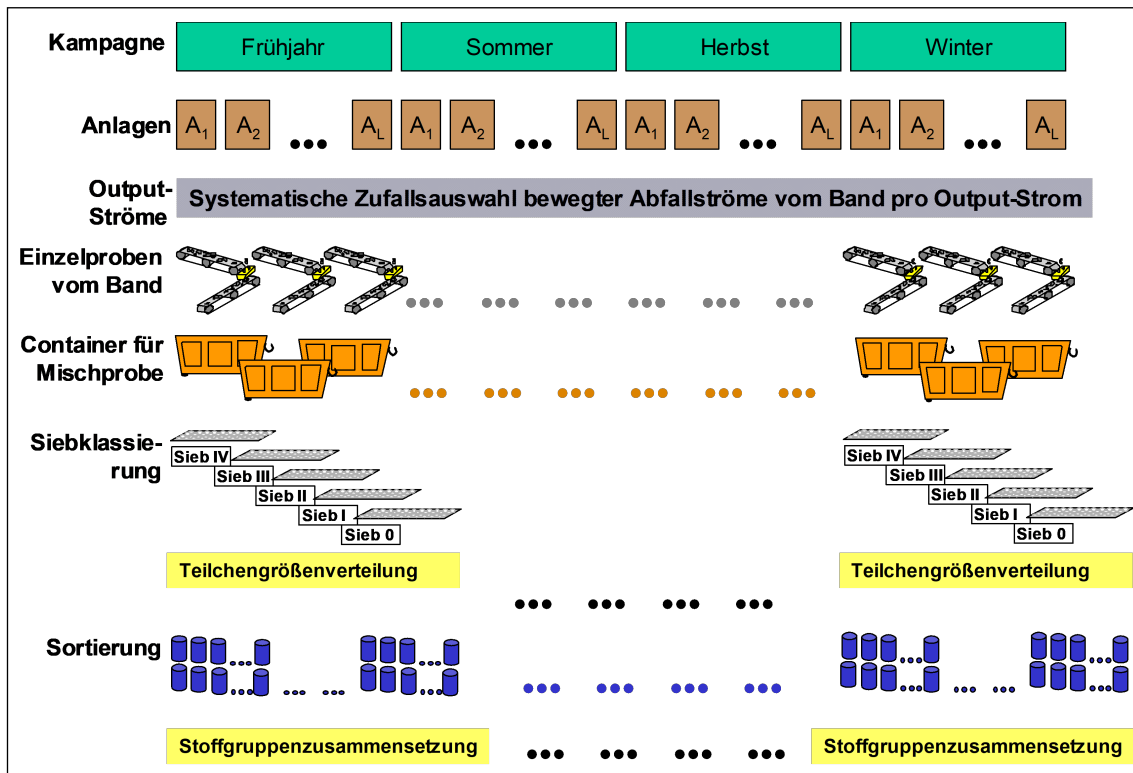
Die Anzahl der Einzel- und Sammelproben ist abhängig von der Heterogenität der Outputströme, welche durch jahreszeitliche Schwankungen, anlieferungsbedingte Schwankungen und materialbedingte Schwankungen (Heterogenität des Abfalls) bestimmt wird.

Die Probenahmenvorschrift der LAGA PN 98 (LAGA, 2001) gibt Anhaltspunkte für die Anzahl an Einzel- und Mischproben für heterogene Abfälle. In der LAGA PN 98 wird beispielsweise das Einzelprobevolumen in Abhängigkeit der maximalen Teilchengröße und die Anzahl an Einzel-, Misch- und Sammelproben in Abhängigkeit des zu untersuchenden Abfallvolumens vorgegeben. Aufgrund der Teilchengrößenverteilung abfallwirtschaftlicher Outputströme sind Einzelproben mit Volumina von 20 bis 60 Litern erforderlich.

Die Mischproben pro Outputstrom werden getrennt nach Stoffgruppen sortiert oder nach Fraktionen klassiert. Für die Untersuchung der chemisch-physikalisch-biologischen Eigenschaften sind die Mischproben der einzelnen Outputströme in jedem Fall getrennt aufzubereiten. Die weitere Probenteilung und -aufbereitung bis zur Laborprobe ist Gegenstand des Müllhandbuchbeitrages „Probenahmemethoden für die Bestimmung der chemisch-physikalisch-biologischen Eigenschaften fester Abfälle“ (Rasemann & Herbst, 2005). Das Zusammenführen von Mischproben der verschiedenen Outputströme einer Anlage zu einer

gemeinsamen Analysenprobe kann in Einzelfällen aus ökonomischen Gründen erfolgen. In Abbildung 9 ist die Probenahme bewegter Abfallströme vom Band schematisch dargestellt.

Abbildung 9: Schema zur Auswahl der Einzelproben bei einer systematischen Zufallsauswahl am bewegten Band und die anschließende Klassifikation des Inhaltes



Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

Bei der systematischen Zufallsauswahl wird der zu untersuchende Abfallstrom in gleich große Intervalle oder Teilgesamtheiten „gleicher Länge“ aufgeteilt. Die erste Stichprobeneinheit wird zufällig aus dem ersten vorgegebenen Intervall $k [N_1, N_2, \dots, N_k] \cap [N_1, N_2, \dots, N]$ der N Untersuchungseinheiten der Grundgesamtheit gezogen. Jede weitere Stichprobeneinheit ist durch den Abstand k festgelegt. Bei der systematischen Zufallsauswahl wird also ausgehend von einer ersten zufällig festgelegten Untersuchungseinheit U_{i^*} jede Einheit mit Abstand k gezogen. Die systematische Stichprobe ist die einfache Zufallsauswahl eines Klumpens (Ansammlung von Stichprobeneinheiten) aus einer Gesamtheit mit N^* Klumpen (wobei $N = N^* \cdot k$).

In Abbildung 10 ist die systematische Zufallsauswahl schematisch dargestellt. Die systematische Zufallsauswahl vom Band ist für mineralische Güter eingehend untersucht und ausführlich in (Cochran, 1972) beschrieben.

2.2 Probenahme von Mono-Abfallarten

Zu den Mono-Abfallarten zählen alle Abfälle, die sich aus einer Stoffgruppe zusammensetzen, wobei die Stoffgruppe auch geringfügige Verunreinigungen oder „Fehlwürfe“ enthalten darf. Mono-Abfallarten stammen aus allen Herkunftsbereichen und entstehen im Produktionsbereich durch Ausschleusung eines bestimmten sortenreinen Produktionsabfalls oder durch Getrennthaltung einzelner Stoffgruppen am Entstehungsort.

Mono-Abfallarten aus Haushalten (z. B. Glas und Papier) können analog der Vorgehensweise der mehrstufig geschichteten Zufallsauswahl für gemischte Siedlungsabfälle untersucht werden. In der Regel weisen Mono-Abfälle eine geringere Heterogenität als gemischte Abfälle auf und können daher mit geringeren Stichprobenmengen untersucht werden. Die Vorgehensweise ist in Kapitel 2.1.1 (mehrstufige geschichtete Zufallsauswahl) beschrieben.

Die Probenahme von Mono-Abfallarten aus bewegten Abfallströmen vom Band erfolgt analog der Vorgehensweise für gemischte Abfallarten in Kapitel 2.1.2. Die Stichprobenmengen für die Beprobung von Mono-Abfällen vom Band sind in der Regel ebenfalls geringer als für gemischte Abfälle.

Für die Beprobung von Mono-Abfallarten aus ruhenden Haufwerken wird auf die Bestimmungen der LAGA PN 98 (LAGA, 2001) verwiesen.

Teil II - Hochrechnungs- und Schätzverfahren

In den vorherigen Kapiteln wurde die Stichprobennahme behandelt. In den folgenden Kapiteln wird auf die Auswertungsmethoden genauer eingegangen. Erst die Auswertung überträgt die Stichprobenergebnisse auf die Grundgesamtheit, d. h. es werden Aussagen für die Realität gewonnen. Diese Rechenoperation wird auch als Hochrechnung oder als Schätzung bezeichnet, da die auf eine Grundgesamtheit übertragenen oder auch hochgerechneten Ergebnisse nur mit einer bestimmten Eintrittswahrscheinlichkeit angegeben werden können. Die Übertragung der Stichprobenergebnisse auf die Grundgesamtheit erfolgt durch eine geeignete Auswertungsmethode, die mit dem ausgewählten Probenahmeverfahren zusammenhängt. Erfolgt die Probenahme z. B. nach einer mehrstufig geschichteten Auswahl, muss auch die Hochrechnungsmethode mehrstufig geschichtet sein.

Aufgrund der vorgegebenen Entstehungsprozesse und Entsorgungsstrukturen fester Abfälle, der Besonderheiten einzelner Abfallarten und der unterschiedlichen Untersuchungsmerkmale müssen die Probenahme- und damit auch die Auswertungsmethoden der jeweiligen abfallwirtschaftlichen Fragestellung angepasst werden. Dieser Teil gibt eine Einführung in die Grundlagen der Hochrechnungs- bzw. Schätzmethoden und stellt die grundlegenden Auswertungsmethoden vor. Zum Schluss wird anhand von Praxisbeispielen aufgezeigt, wie die Auswertungsmethoden zur quantitativen und qualitativen Beschreibung fester Abfälle angewandt werden.

3 Stichprobenverfahren

Zum besseren Verständnis der Hochrechnungs- und Schätzverfahren wird eine kurze Einführung in die grundlegenden Stichprobenverfahren gegeben. Die Stichprobenverfahren oder auch Auswahlverfahren können generell in zufällige Auswahlverfahren und nichtzufällige Auswahlverfahren eingeteilt werden. Zufällige Auswahlverfahren sind dadurch gekennzeichnet, dass alle Elementareinheiten einer Grundgesamtheit eine angebbare und – in endlichen Grundgesamtheiten - von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit besitzen, ausgewählt zu werden. Für nichtzufällige Auswahlverfahren trifft dies nicht zu.

3.1 Nichtzufällige Auswahlverfahren

Zu den nichtzufälligen Auswahlverfahren zählen die bewussten Auswahlverfahren wie z. B. die Auswahl „typischer“ Fälle, die Auswahl nach dem Konzentrationsprinzip oder die Quotenauswahl (Hartung et al., 2007). Sie werden vorwiegend in der Markt- und Meinungsforschung eingesetzt und dort auch Beurteilungsstichproben genannt. Über Kenntnisse zur Struktur der Grundgesamtheit wird versucht, eine repräsentative Auswahl zu treffen. Die Vorteile liegen in der einfacheren Planung und der kostengünstigeren Umsetzung.

Für nichtzufällige Auswahlverfahren existiert keine mathematisch/statistische Grundlage zur Berechnung von Stichprobenfehlern und Schätzwerten. Nichtzufällige Auswahlverfahren eignen sich daher nur in begründeten Einzelfällen für die Probenahme fester Abfälle.

In der Abfallwirtschaft finden nichtzufällige Auswahlverfahren z.B. bei der Untersuchung von Gewerbeabfällen Anwendung. Die stark variierende Verursacherstruktur im Gewerbebereich kann nur durch die Einbeziehung einer großen Probe z. B. nach dem Konzentrationsprinzip ausreichend berücksichtigt werden.

3.2 Zufällige Auswahlverfahren

Allgemein wird die zufällige Auswahl durch ein Auswahlmodell beschrieben, indem aus einer Grundgesamtheit U_G , mit Elementareinheiten U_i der Menge N , nach dem Zufallsprinzip eine Teilmenge (Stichprobe) u_s , mit Elementareinheiten u_i der Menge n , ausgewählt wird. Alle Elementareinheiten U_i besitzen eine angebbare und - in endlichen Grundgesamtheiten - von Null verschiedene Auswahlwahrscheinlichkeit. Die Menge N aller Elementareinheiten U_i ergeben die Grundgesamtheit U_G , wie in Gleichung 8 beschrieben.

$$U_G = \bigcup_{i=1}^N U_i \quad \text{Gleichung 8}$$

Die Menge n aller Elementareinheiten u_i ergeben, wie in Gleichung 9 beschrieben, die Stichprobe u_s .

$$u_s = \bigcup_{i=1}^n u_i \quad \text{Gleichung 9}$$

Die Menge der N Elementareinheiten wird als Umfang der Grundgesamtheit, die Menge der n Elementareinheiten als Umfang der Stichprobe bezeichnet.

Die zufällige Auswahl von Stichprobeneinheiten kann mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators, einer Zufallszahlentabelle oder einer Urne mit nummerierten Kugeln (Urnenmodell) durchgeführt werden.

Zufallsstichproben besitzen weiterhin mindestens folgende Eigenschaften:

- ▶ Aus einer Grundgesamtheit kann durch wiederholte Anwendung (mit Zurücklegen) von Auswahlverfahren eine wohldefinierte Menge verschiedener Stichproben bestehend aus den

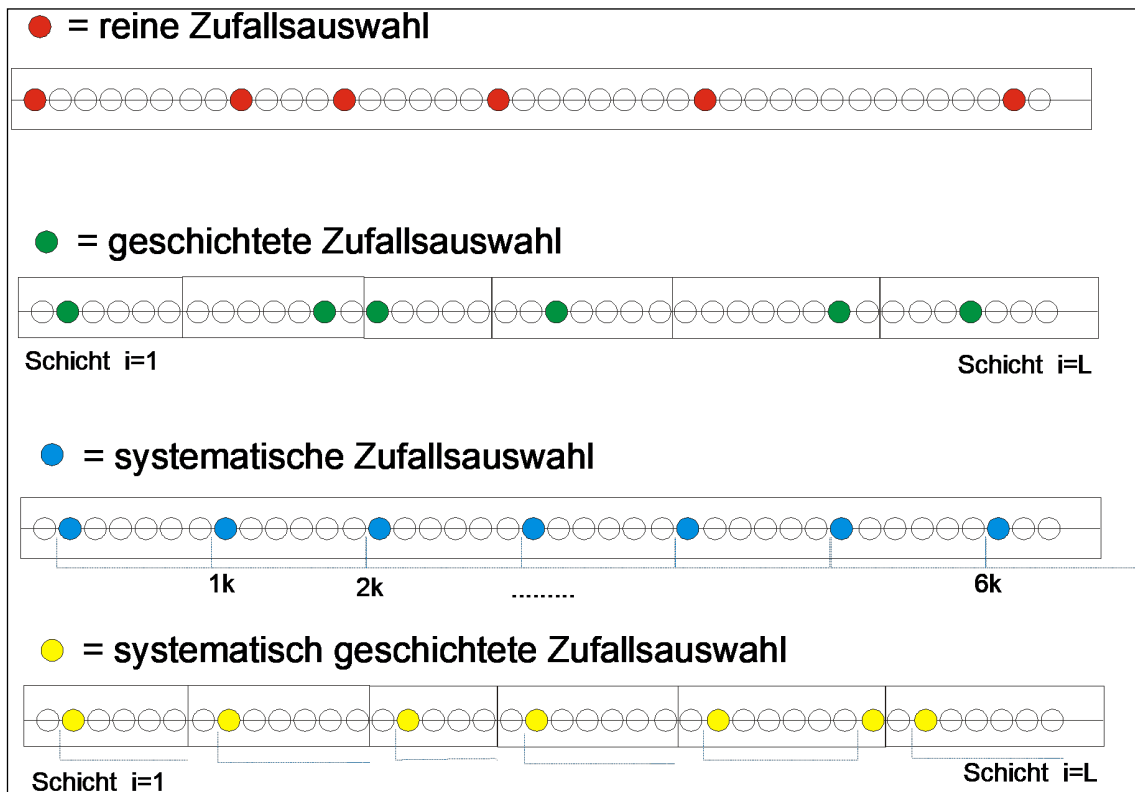
Stichprobenelementen $u_i = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ gewonnen werden. Die Anzahl der möglichen Stichproben bei unterscheidbaren Elementen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge berechnet sich nach Gleichung 10.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = {}_N C_n \qquad \text{Gleichung 10}$$

Weiterhin muss genau feststehen, welche Elemente U_i einer Grundgesamtheit zu u_i gehören.

- ▶ Jedes mögliche Stichprobenelement u_i hat eine zugehörige Auswahlwahrscheinlichkeit π_i , welche bekannt sein muss.
- ▶ Eine oder mehrere mögliche Stichprobenelemente u_i werden mit den ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten π_i ausgewählt. Die tatsächlich ausgewählten Stichproben werden durch Zufallszahlen bestimmt.
- ▶ Es ist anzugeben, wie der gesuchte Schätzwert aus der Stichprobe berechnet wird. Jeder speziellen Stichprobe kann nur ein einziger Schätzwert zugeordnet werden, z. B. der arithmetische Mittelwert.
- ▶ Zufallsstichproben können grundsätzlich nach einem einfachen/reinen Auswahlverfahren oder einem systematischen Auswahlverfahren gewonnen werden. Wird eine Grundgesamtheit vor der Auswahl in mehrere Teilgesamtheiten, sogenannte Schichten, unterteilt, spricht man von einer geschichteten Auswahl. Die Auswahl innerhalb der Schichten kann wiederum rein oder systematisch sein.
- ▶ Werden die Elemente einer Grundgesamtheit in einer Modellannahme entlang einer Geraden aufgereiht, können vier grundlegende Zufallsauswahlverfahren unterschieden werden. Anschaulich ist dies in Abbildung 11 dargestellt.

Abbildung 11: Vergleich der grundlegenden Zufallsauswahlverfahren



Quelle: Eigene Darstellung, ARGUS

4 Hochrechnungs- oder Schätzverfahren

Primäres Ziel einer Stichprobenuntersuchung ist es, Aussagen über die interessierenden Merkmale einer Grundgesamtheit zu treffen. Zur Beschreibung der Merkmale und damit der Eigenschaften einer Grundgesamtheit eignen sich z. B. für diskrete Merkmale die Parameter Anzahl und Anteil und für stetige Merkmale die Parameter Mittelwert und Summe. Sie müssen aus den erhobenen Stichprobenergebnissen hochgerechnet oder auch geschätzt werden.

Die Hochrechnungs- oder Schätzverfahren müssen für jedes Auswahlverfahren separat entwickelt werden. Um die Vertrauenswürdigkeit eines Probenahmeverfahrens beurteilen zu können, müssen sowohl die Lageparameter (Mittelwerte, Summen etc.) als auch die Streuungsparameter (Varianzen, Spannweiten etc.) geschätzt werden. Nachfolgend werden die Hochrechnungsverfahren für die grundlegenden Auswahlverfahren, die einfache oder reine Zufallsstichprobe, die systematische Zufallsstichprobe, die geschichtete Zufallsstichprobe und für die erweiterten Auswahlverfahren, die mehrstufige Zufallsstichprobe und die gebundene Zufallsstichprobe (Verhältnisschätzung) angegeben.

4.1 Einfache oder reine Zufallsstichprobe

Bei der einfachen oder reinen Zufallsstichprobe werden n Stichprobeneinheiten nach dem Zufallsprinzip aus N Einheiten der Grundgesamtheit ausgewählt. Nach der Analyse der Stichprobeneinheiten werden die gesuchten Parameter der Grundgesamtheit aus den Stichprobenergebnissen hochgerechnet oder auch geschätzt.

4.1.1 Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert

Für die einfache Zufallsauswahl berechnen sich die Parameter Summe und Mittelwert nach den Gleichungen, welche in den folgenden Kapiteln nach Unterteilung auf der Ebene der Stichprobe und Grundgesamtheit dargestellt werden.

4.1.1.1 Für die Stichprobe

Für die Summe der Stichprobe müssen die n Werte aus der Stichprobe, laut Gleichung 11, addiert werden.

$$x_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad \text{Gleichung 11}$$

Der Mittelwert aus n Werten der Stichprobe wird anhand Gleichung 12 berechnet.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{Gleichung 12}$$

4.1.1.2 Für die Grundgesamtheit

Für die Summe der Grundgesamtheit müssen die N Werte der Grundgesamtheit, laut Gleichung 13, addiert werden.

$$X_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad \text{Gleichung 13}$$

Der Mittelwert aus N Einheiten der Grundgesamtheit wird anhand Gleichung 14 berechnet.

$$\bar{X} = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} \quad \text{Gleichung 14}$$

Da im Normalfall jedoch nicht alle Einheiten der Grundgesamtheit betrachtet wurden, kann die Summe und der Mittelwert auch aus einer Schätzung anhand der Stichprobenparameter berechnet werden. Bei der Schätzung für die einfache Zufallsauswahl wird die Summe (in der

Grundgesamtheit) aus der Stichprobensumme multipliziert mit dem Faktor $\frac{N}{n}$ und der Mittelwert \bar{X} direkt aus dem arithmetischen Mittel der Stichprobe \bar{x} geschätzt. Die Rechenvorschrift zur Bildung der Schätzwerte heißt Schätzfunktion oder auch Stichprobenfunktion. Das Verhältnis wird Hochrechnungsfaktor und der Kehrwert dieses Verhältnisses $f = \frac{n}{N}$ Auswahlatz genannt. Die Schätzwerte für die Parameter Summe und Mittelwert berechnen sich mittels Gleichung 15 und 16.

$$\hat{X}_{\Sigma} = \hat{X}_{\Sigma}(x_1, \dots, x_n) = \frac{N}{n} * x_{\Sigma} \quad \text{Gleichung 15}$$

$$\hat{X} = \hat{X}(x_1, \dots, x_n) = \bar{x} \quad \text{Gleichung 16}$$

Die mit dem Zeichen $\hat{}$ gekennzeichneten Variablen werden Schätzwerte genannt (Streng genommen sind es Schätzfunktionen, da es sich um Zufallsvariablen mit Erwartungswert und Varianz handelt). Zur Vereinfachung der Schreibweise wird in diesem Dokument der Begriff Schätzwert verwendet.

4.1.2 Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert

Die Genauigkeit einer Schätzung wird mit Hilfe des Streuungsparameters Varianz bzw. der davon abgeleiteten Parameter Standardabweichung, Variationskoeffizient und Konfidenzintervall berechnet. Die Varianz der Merkmalsausprägungen X_i einer Grundgesamtheit wird wie in Gleichung 17 dargestellt definiert.

$$Var(X) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1} = S^2 \quad \text{Gleichung 17}$$

Zur Berechnung der Varianzen der Schätzwerte wird die Varianz der Einzelwerte in der Grundgesamtheit S^2 benötigt. S^2 ist in der Regel unbekannt, weil hierzu eine Totalerhebung aller Einheiten nötig wäre. Die Varianz S^2 wird aus den Stichprobenwerten (Stichprobenvarianz s^2) wie in Gleichung 18 dargestellt berechnet.

$$S^2 \approx \hat{S}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{Gleichung 18}$$

S^2 Varianz der Einzelwerte der Grundgesamtheit

s^2 Varianz der Einzelwerte der Stichprobe

Damit errechnen sich die Schätzfunktionen für die Varianzen der Schätzwerte Summe und Mittelwert mittels Gleichung 19 und 20.

$$var(\hat{X}_{\Sigma}) = \frac{N^2 * s^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \quad \text{Gleichung 19}$$

$$var(\hat{X}) = \frac{s^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \quad \text{Gleichung 20}$$

Es ist der Unterschied zwischen tatsächlicher Varianz $Var(\hat{X}) = S^2$ und geschätzter Varianz $var(\hat{X}) = s^2$ eines Parameters zu beachten.

Die Varianz der Schätzparameter hängt von drei Faktoren ab:

- ▶ der Varianz der Einzelwerte s^2
- ▶ dem Stichprobenumfang n
- ▶ dem als Endlichkeitskorrektur bezeichneten Faktor $\left(\frac{N-n}{N-1} \right)$

Die Endlichkeitskorrektur verkleinert die Varianz des geschätzten Parameters. Untersucht man alle Einheiten einer Grundgesamtheit, so ergibt sich für die Endlichkeitskorrektur $\frac{N-n}{N-1} = 0$. Eine Varianz des geschätzten Parameters ist dann nicht vorhanden, oder anders ausgedrückt: es gibt keine Unsicherheit über die geschätzten Parameter Summe und Durchschnitt.

Ab einem Auswahlatz f von $0,05 = 5\%$ lässt sich die Endlichkeitskorrektur vernachlässigen. Die Schätzfunktionen für die Varianz der Summe und des Mittelwertes berechnen sich dann mit Gleichung 21 und 22.

$$\text{var}(\hat{X}_{\Sigma}) = \frac{N^2 * s^2}{n} \quad \text{Gleichung 21}$$

$$\text{var}(\hat{X}) = \frac{s^2}{n} \quad \text{Gleichung 22}$$

4.1.3 Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert

Unter der Voraussetzung, dass die Schätzwerte Summe \hat{X}_{Σ} und Mittelwert \hat{X} um die entsprechenden Werte in der Grundgesamtheit normalverteilt sind, und die Schätzung der Varianz von s^2 unabhängig von \bar{x} χ^2 – verteilt (Chi – Quadrat -Verteilung) (Hartung et al., 2007) ist, können Konfidenzintervalle für die Schätzparameter Summe und Mittelwert mit den Gleichungen 23 und 24 berechnet werden. Beide Gleichungen können nur verwendet werden, wenn der Auswahlatz $f < 0,05$ ist.

$$[\hat{X}_{\Sigma;U}; \hat{X}_{\Sigma;O}] = N * \bar{x} \pm \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} * N * \sqrt{s^2}}{\sqrt{n}} \quad \text{Gleichung 23}$$

$$[\hat{X}_U; \hat{X}_O] = \bar{x} \pm \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} * \sqrt{s^2}}{\sqrt{n}} \quad \text{Gleichung 24}$$

$\hat{X}_{\Sigma;U}$ untere Konfidenzintervallgrenze für die geschätzte Summe

$\hat{X}_{\Sigma;O}$ obere Konfidenzintervallgrenze für die geschätzte Summe

\hat{X}_U untere Konfidenzintervallgrenze für den geschätzten Mittelwert

\hat{X}_O obere Konfidenzintervallgrenze für den geschätzten Mittelwert

$t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ $1-\alpha/2$ -Quantil der Student-t Verteilung für die gewünschte Sicherheitswahrscheinlichkeit, wobei $n-1$ die Anzahl der Freiheitsgrade und α die Irrtumswahrscheinlichkeit angeben.

4.2 Systematische Zufallsstichprobe

Bei der systematischen Zufallsauswahl wird die Grundgesamtheit entsprechend des Stichprobenumfangs n in N^* Intervalle der Länge k eingeteilt. Die Ziehung der Stichprobe erfolgt demnach, dass aus dem ersten N^* -ten Intervall ein Element zufällig bestimmt wird. Ausgehend von diesem ersten zufällig ausgewählten Element werden alle weiteren Elemente mit Abstand k der Stichprobe zugeordnet. Da aus jedem N^* -ten Intervall nur eine Stichprobeneinheit gezogen wird, ist $N^* = n$.

4.2.1 Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert

Die Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert kann analog der einfachen Zufallsauswahl erfolgen. Für $N = N^* * k$ liefern die Schätzfunktionen einer systematischen Stichprobe

$(\hat{X}_{\Sigma, sy}(x_1, \dots, x_n)$ und $\hat{X}_{sy}(x_1, \dots, x_n)$) mit zufällig bestimmtem Anfang einen unverzerrten Schätzwert für X_{Σ} bzw. \bar{X} .

Ist $N \neq N^* * k$ verbleibt ein Restintervall, das sich in der Länge k von den anderen Intervallen unterscheidet. Dies kann zur Verzerrung des Schätzwertes beitragen.

4.2.2 Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert

Die Varianz der Schätzwerte Summe und Mittelwert einer systematischen Stichprobe berechnet sich für $N = N^* * k$ mittels Gleichung 25 und 26.

$$\text{Var}(\hat{X}_{\Sigma, sy}) = N^2 * \frac{N^*-1}{N^*} * S_1^2 \quad \text{Gleichung 25}$$

$$\text{Var}(\hat{X}_{sy}) = \frac{N^*-1}{N^*} * S_1^2 \quad \text{Gleichung 26}$$

Für $N \neq N^* * k$ wird die Varianz mit den Gleichungen 27 und 28 berechnet.

$$\text{Var}(\hat{X}_{\Sigma, sy}) = N((N - 1) * S^2 - k(N^* - 1) * S_2^2) \quad \text{Gleichung 27}$$

$$\text{Var}(\hat{X}_{sy}) = \frac{N-1}{N} * S^2 - \frac{k*(N^*-1)}{N} * S_2^2 \quad \text{Gleichung 28}$$

N	Anzahl der Elementareinheiten (hier: Sekundäreinheiten) in der Grundgesamtheit
N^*	Anzahl der Primäreinheiten gleicher Länge (hier: Klumpen) bei der systematischen Zufallsauswahl in der Grundgesamtheit
k	Stichprobenintervall oder Abstand der Stichprobeneinheiten bei der systematischen Zufallsauswahl
S^2	Gesamtvarianz der Einzelwerte in der Grundgesamtheit
S_1^2	Varianz der Einzelwerte zwischen den Primäreinheiten (hier: Klumpen) in der Grundgesamtheit
S_2^2	Varianz der Einzelwerte innerhalb der Primäreinheiten (hier: Klumpen) in der Grundgesamtheit

Werden die meist unbekanntesten Varianzen S_1^2 und S_2^2 durch die Stichprobenvarianzen s_1^2 und s_2^2 ersetzt, berechnet sich die geschätzte Varianz des geschätzten Mittelwertes für die systematische Zufallstichprobe nach den Gleichungen 29 und 30. Wobei Gleichung 29 für $N = k * n$ und Gleichung 30 für $N \neq k * n$ verwendet wird.

$$\text{var}(\hat{X}_{sy}) = \frac{n-1}{n} * s_1^2 \quad \text{Gleichung 29}$$

$$\text{var}(\hat{X}_{sy}) = \frac{N-1}{N} * S^2 - \frac{k*(n-1)}{N} * S_2^2 \quad \text{Gleichung 30}$$

n	Anzahl der Stichprobeneinheiten
S^2	Gesamtvarianz der Einzelwerte in der Stichprobe
s_1^2	Varianz der Einzelwerte zwischen den Primäreinheiten (hier: Klumpen) in der Stichprobe
s_2^2	Varianz der Einzelwerte innerhalb der Primäreinheiten (hier: Klumpen) in der Stichprobe

Bei der systematischen Zufallsauswahl ist eine weitere Besonderheit zu beachten. Durch die Festlegung gleicher Probenabstände mit der Länge k besteht eine erhöhte Wahrscheinlichkeit, dass Einheiten mit ähnlichem Muster ausgewählt werden, die sich von den restlichen Untersuchungseinheiten unterscheiden. In diesem Fall liegt eine systematische Abweichung (Einflussgröße, die zu einer Verzerrung führt) vor und muss durch einen Korrelationsfaktor, der

die Abhängigkeit zwischen Untersuchungseinheiten mit gleichen Abständen beschreibt, berücksichtigt werden. Mathematisch wird dies durch die Berechnung der abhängigen Varianz, wie in Gleichung 31 abgebildet, gelöst.

$$\text{Var}(X_k) = [\text{Var}(X) * (1 - r_k)] \quad \text{Gleichung 31}$$

Wobei r_k mittels der Gleichung 32 berechnet wird.

$$r_k = \frac{\text{cov}(X_i; X_{i+k})}{\text{Var}(X)} \quad \text{Gleichung 32}$$

$\text{Var}(X_k)$ abhängige Varianz mit dem Abstand k

r_k Korrelationsfaktor, der die Abhängigkeit zweier Messwerte mit dem Abstand k beschreibt

$\text{cov}(X_i; X_{i+k})$ Co-Varianz der Merkmalsausprägungen mit Abstand k

4.2.3 Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert

Die Konfidenzintervalle für die Parameter der systematischen Auswahl berechnen sich analog der einfachen Zufallsauswahl durch Einsetzen der Schätzwerte und Varianzen der systematischen Auswahl in die in Kapitel 4.1.3 angegebenen Gleichungen.

4.3 Geschichtete Zufallsstichprobe

Die Grundgesamtheit wird bei der geschichteten Vorgehensweise in $h = 1$ bis L Schichten unterteilt. Für jede Schicht werden n_h Stichprobeneinheiten nach dem Zufallsprinzip aus den N_h Einheiten der Schichten der Grundgesamtheit ausgewählt.

4.3.1 Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert

Für die geschichtete Zufallsauswahl berechnen sich die Parameter Summe und Mittelwert für jede Schicht oder innerhalb der Schichten analog der einfachen Zufallsauswahl.

4.3.1.1 Für die Stichprobe innerhalb der h-ten Schicht

Für die Summe aus n_h Einheiten der Stichprobe muss die Formel in Gleichung 33 für jede Schicht h angewendet werden.

$$x_{\Sigma, h} = \sum_{i=1}^{n_h} x_{h,i} = x_{h,1} + x_{h,2} + \dots + x_{h,n_h} \quad \text{Gleichung 33}$$

Für den Mittelwert aus n_h Einheiten der Stichprobe muss die Formel in Gleichung 34 für jede Schicht h angewendet werden.

$$\bar{x}_h = \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} x_{h,i} = \frac{x_{h,1} + x_{h,2} + \dots + x_{h,n_h}}{n_h} \quad \text{Gleichung 34}$$

4.3.1.2 Für die Grundgesamtheit innerhalb der h-ten Schicht

Für die Summe aus N_h Einheiten der Grundgesamtheit muss die Formel in Gleichung 35 für jede Schicht h angewendet werden.

$$X_{\Sigma, h} = \sum_{i=1}^{N_h} X_{h,i} = X_{h,1} + X_{h,2} + \dots + X_{h,N_h} \quad \text{Gleichung 35}$$

Für den Mittelwert aus N_h Einheiten der Grundgesamtheit muss die Formel in Gleichung 36 für jede Schicht h angewendet werden.

$$\bar{X}_h = \frac{1}{N_h} * \sum_{i=1}^{N_h} X_{h,i} = \frac{X_{h,1} + X_{h,2} + \dots + X_{h,N_h}}{N_h} \quad \text{Gleichung 36}$$

Durch Aufsummieren über alle Schichten ergeben sich die gesuchten Parameter für die Grundgesamtheit.

4.3.1.3 Für die Stichprobe für alle Schichten

Für die Summe aus n_h Einheiten der Stichprobe muss die Formel in Gleichung 37 für alle L Schichten angewendet werden.

$$x_{\Sigma} = \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{n_h} x_{h,i} = x_{h,1} + x_{h,2} + \dots + x_{h,n_h} \quad \text{Gleichung 37}$$

Für den Mittelwert aus n_h Einheiten der Stichprobe muss die Formel in Gleichung 38 für alle L Schichten angewendet werden.

$$\bar{x} = \sum_{h=1}^L \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} x_{h,i} = \sum_{h=1}^L \frac{x_{h,1} + x_{h,2} + \dots + x_{h,n_h}}{n_h} \quad \text{Gleichung 38}$$

4.3.1.4 Für die Grundgesamtheit für alle Schichten

Für die Summe aus N_h Einheiten der Grundgesamtheit muss die Formel in Gleichung 39 für alle L Schichten angewendet werden.

$$X_{\Sigma} = \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{N_h} X_{h,i} = \sum_{h=1}^L X_{h,1} + X_{h,2} + \dots + X_{h,N_h} \quad \text{Gleichung 39}$$

Für den Mittelwert aus N_h Einheiten der Grundgesamtheit muss die Formel in Gleichung 40 für alle L Schichten angewendet werden.

$$\bar{X} = \sum_{h=1}^L \frac{1}{N_h} * \sum_{i=1}^{N_h} X_{h,i} = \sum_{h=1}^L \frac{X_{h,1} + X_{h,2} + \dots + X_{h,N_h}}{N_h} \quad \text{Gleichung 40}$$

Wie bei der Schätzung für die einfache Zufallsauswahl wird der Gesamtmittelwert \bar{X} für die geschichtete Zufallsauswahl für die einzelnen Schichten direkt aus dem arithmetischen Mittel der Stichprobe \bar{x} geschätzt. Die Schätzwerte für die Parameter berechnen sich mit den Gleichungen 41 und 42.

$$\hat{X}_{\Sigma} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{h,i} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} * x_{\Sigma,h} \quad \text{Gleichung 41}$$

$$\hat{\bar{X}} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} * \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} x_{h,i} = \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{N} * \bar{x}_h \quad \text{Gleichung 42}$$

N_h Anzahl der Einheiten in der Grundgesamtheit, h-ten Schicht

n_h Anzahl der Stichprobeneinheiten, h-ten Schicht

L Anzahl der Schichten

$x_{h,i}$ Stichprobenmerkmal h-ten Schicht, i-ten Stichprobe

$x_{\Sigma,h}$ Stichprobensumme, h-ten Schicht

\bar{x}_h Stichprobenmittel, h-ten Schicht

4.3.2 Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert

Die Varianz der Schätzwerte Summe $\hat{X}_{\Sigma,h}$ und Mittelwert \hat{X}_h innerhalb einer Schicht berechnet sich analog zur Varianz von Summe und Mittelwert der einfachen Zufallsauswahl mittels den Gleichungen 43 und 44.

$$\text{Var}(\hat{X}_{\Sigma,h}) = \frac{N_h^2 \cdot \text{Var}(X_h)}{n_h} * \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \quad \text{Gleichung 43}$$

$$\text{Var}(\hat{X}_h) = \frac{\text{Var}(X_h)}{n_h} * \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \quad \text{Gleichung 44}$$

Die Varianz der Schätzwerte über alle Schichten berechnet sich damit aus der Summe der Varianzen der Schätzwerte für die einzelnen Schichten (nach den Rechenregeln für unabhängige Zufallsvariablen) mittels Gleichung 45.

$$\text{Var}(\hat{X}) = \sum_{h=1}^L \text{var}(\hat{X}_h) = \text{var}(\hat{X}_1) + \text{var}(\hat{X}_2) + \dots + \text{var}(\hat{X}_L) \quad \text{Gleichung 45}$$

Aus Gleichung 46 und Gleichung 47 ($\hat{X}_{\Sigma} = N * \bar{x}$) lassen sich die Varianzen für die Schätzwerte Summe und Mittelwert ableiten.

$$\text{Var}(\hat{X}_{\Sigma}) = \sum_{h=1}^L \text{Var}(X_{\Sigma,h}) = \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 * S_h^2}{n_h} * \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \quad \text{Gleichung 46}$$

$$\text{Var}(\hat{X}) = \sum_{h=1}^L \text{Var}(\hat{X}_h) = \sum_{h=1}^L \frac{S_h^2}{n_h} * \left(\frac{N_h - n_h}{N_h - 1}\right) \quad \text{Gleichung 47}$$

S_h Varianz der Einheiten in der Grundgesamtheit, h-ten Schicht

Bzw. für kleine Auswahlsätze ($f < 0,05$) und geschätzter Varianz mit den Gleichungen 48 und 49.

$$\text{var}(\hat{X}_{\Sigma}) = \sum_{h=1}^L \frac{N_h^2 * s_h^2}{n_h} \quad \text{Gleichung 48}$$

$$\text{var}(\hat{X}) = \sum_{h=1}^L \frac{s_h^2}{n_h} \quad \text{Gleichung 49}$$

s_h Varianz der Einheiten in der Stichprobe, h-ten Schicht

Die Varianz der Gesamtsumme und des Gesamtmittelwertes hängen von folgenden Faktoren ab:

- ▶ von der Varianz der Einzelwerte innerhalb jeder Schicht h : $\text{var}(x_h)$
- ▶ von der Anzahl der Stichprobenelemente in jeder Schicht h : n_h
- ▶ von der relativen Größe einer Schicht h : N_h/N
- ▶ von der Endlichkeitskorrektur; $\frac{N-n}{N-1}$

Die Genauigkeit der Schätzwerte wird erhöht, wenn es gelingt, die Elemente der Grundgesamtheit in Schichten einzuteilen, dass die Varianz der Einzelwerte innerhalb jeder Schicht $\text{var}(x_h)$ möglichst klein wird. Dies ist dann der Fall, wenn homogene Schichten gebildet werden. Man spricht von einem positiven Schichtungseffekt, wenn sich die Gesamtvarianz gegenüber der einfachen Zufallsauswahl verringert.

Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert bei speziellen Aufteilungen

Die bisher beschriebenen Formeln sind für eine beliebige Aufteilung des Stichprobenumfangs auf die Schichten gültig. Der Stichprobenumfang kann gleichmäßig, proportional oder

kostenoptimal über alle Schichten erfolgen. Bei gleichmäßiger Aufteilung des Stichprobenumfangs werden aus jeder Schicht gleich viele Stichprobenelemente gezogen. Anhand der Gleichung 50 berechnet sich die gleichmäßige Aufteilung des Stichprobenumfangs.

$$n_h = \frac{n}{L} \quad \text{Gleichung 50}$$

Bei proportionaler Aufteilung des Stichprobenumfangs wird aus jeder Schicht ein gleicher Anteil Stichprobenelemente (entsprechend der Aufteilung der Grundgesamtheit in Schichten) gezogen. Die Stichprobe bei der proportionalen Aufteilung wird auch selbstgewichtete Stichprobe genannt. Für alle Schichten ergibt sich der Stichprobenumfang anhand der Gleichung 51.

$$n_h = f_h * N_h = \frac{n}{N} * N_h \text{ für } f_h = \frac{n}{N} = \text{const} \quad \text{Gleichung 51}$$

Bei kostenoptimaler Aufteilung des Stichprobenumfangs wird aus jeder Schicht ein bestimmter Anteil der Stichprobenelemente gezogen, sodass die Gesamtvarianz minimal wird. Der Stichprobenumfang teilt sich optimal auf, wenn der in Gleichung 52 berechnete Wert n_h kleiner als eins ist.

$$n_h = \frac{N_h * \sqrt{\text{var}(x_h)}}{\sum_{h=1}^L (N_h * \sqrt{\text{var}(x_h)})} < 1 \text{ für } n = \sum_{h=1}^L n_h \quad \text{Gleichung 52}$$

Die optimale Aufteilung liefert die effizienteste Schätzfunktion. Allerdings ist die Standardabweichung der Einzelwerte in den Schichten erforderlich, die vor der Untersuchung nur selten bekannt ist. In der Praxis wird häufig ein gleicher oder proportionaler Auswahlatz in allen Schichten gewählt.

4.3.3 Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert

Die Konfidenzintervalle für die Parameter der geschichteten Auswahl berechnen sich analog der einfachen Zufallsauswahl durch Einsetzen der Schätzwerte und Varianzen der geschichteten Auswahl in die in Kapitel 4.1.3 angegebenen Gleichungen.

4.4 Mehrstufige Zufallsstichprobe

Bei mehrstufigen Verfahren müssen die gesuchten Parameter Summe und Mittelwert sowie die zugehörigen Varianzen über alle Auswahlstufen geschätzt werden. Berechnet werden diese mit den Gleichungen 53 und 54.

$$\theta \approx \hat{\theta} = f(X) = f_1(f_2 \dots (f_Q(X))) \quad \text{Gleichung 53}$$

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \text{var}(f(X)) = \text{var}(f_1(f_2 \dots (f_Q(X)))) \quad \text{Gleichung 54}$$

θ *der unbekannte Parameter der Grundgesamtheit*

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ *die Schätzfunktion von θ mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P\{\hat{\theta}\}$*

X *Zufallsvariable mit $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$*

Q *Anzahl der Stufen des mehrstufigen Verfahrens*

$f(X)$ ist eine Schätzfunktion bestehend aus den Teil-Schätzfunktionen (f_1, f_2, \dots, f_Q) entsprechend der Q Stufen.

4.4.1 Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert

In einem mehrstufigen Auswahlmodell wird die Gesamtsumme X_{Σ} ausgehend von den Einheiten der untersten Stufe über alle Einheiten mit der Gleichung 55 geschätzt.

$$X_{\Sigma} \approx \hat{X}_{\Sigma} = \frac{N_I}{n_I} \cdot \sum_{i=1}^{n_I} \frac{N_{II,i}}{n_{II,i}} \sum_{j=1}^{n_{II,i}} \dots \frac{N_{Q,q-1}}{n_{Q,q-1}} \sum_{q=1}^{n_{Q,q-1}} \dot{x}_{i,j,\dots,q} \quad \text{Gleichung 55}$$

Sind die Auswahlsätze f auf jeder Auswahlstufe konstant ($f_{II,i} = \frac{N_{II,i}}{n_{II,i}} = \text{const.}$ für alle i bis $f_{Q,q-1} = \frac{N_{Q,q-1}}{n_{Q,q-1}} = \text{const.}$ für alle q), vereinfacht sich Gleichung 55 zu Gleichung 56.

$$X_{\Sigma} \approx \hat{X}_{\Sigma} = \frac{N_{\Sigma Q}}{n_{\Sigma Q}} \cdot \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_{II}} \dots \sum_{q=1}^{n_Q} \dot{x}_{i,j,\dots,q} \quad \text{Gleichung 56}$$

Mit Gleichung 57 wird der Gesamtmittelwert \bar{X} für nicht konstante Auswahlsätze berechnet.

$$\bar{X} \approx \hat{\bar{X}} = \frac{1}{n_I} \cdot \sum_{i=1}^{n_I} \frac{1}{n_{II,i}} \sum_{j=1}^{n_{II,i}} \dots \frac{1}{n_{Q,q-1}} \sum_{q=1}^{n_{Q,q-1}} \dot{x}_{i,j,\dots,q} \quad \text{Gleichung 57}$$

Bzw. für $f_{II} \dots f_Q = \text{const}$ berechnet sich der Gesamtmittelwert \bar{X} mit der Gleichung 58.

$$\bar{X} \approx \hat{\bar{X}} = \frac{1}{n_{\Sigma Q}} \cdot \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_{II}} \dots \sum_{q=1}^{n_Q} \dot{x}_{i,j,\dots,q} \quad \text{Gleichung 58}$$

X_{Σ}	Gesamtsumme des gesuchten Merkmals – wahrer Wert
\bar{X}	Gesamtmittelwert des gesuchten Merkmals – wahrer Wert
\hat{X}_{Σ}	geschätzte Gesamtsumme des gesuchten Merkmals
$\hat{\bar{X}}$	geschätzter Gesamtmittelwert des gesuchten Merkmals
n_I	Anzahl der Primäreinheiten in der Stichprobe
$n_{II,i}$	Anzahl der Sekundäreinheiten in der i -ten Primäreinheit in der Stichprobe
n_{II}	Anzahl der Sekundäreinheiten in der i -ten Primäreinheit in der Stichprobe ($n_{II} = \text{const.}$ für alle i)
$N_{Q,q-1}$	Anzahl der Einheiten der untersten Stufe in der $q-1$ -ten Einheit in der Grundgesamtheit
N_Q	Anzahl der Einheiten der untersten Stufe in der $q-1$ -ten Einheit in der Grundgesamtheit ($N_Q = \text{const.}$ für alle q)
$n_{Q,q-1}$	Anzahl der Einheiten der untersten Stufe in der $q-1$ -ten Einheit in der Stichprobe
n_Q	Anzahl der Einheiten der untersten Stufe in der $q-1$ -ten Einheit in der Stichprobe ($n_Q = \text{const.}$ für alle q)
$N_{\Sigma Q}$	Anzahl aller Einheiten der untersten Stufe in der Grundgesamtheit $N_{\Sigma Q} = N_I \cdot N_{II} \cdot \dots \cdot N_Q$
$n_{\Sigma Q}$	Anzahl aller Einheiten der untersten Stufe in der Stichprobe $n_{\Sigma Q} = n_I \cdot n_{II} \cdot \dots \cdot n_Q$
$\dot{x}_{i,j,\dots,q}$	Stichprobenmerkmal der q -ten Untereinheit

4.4.2 Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert

In einem mehrstufigen Auswahlmodell wird die Gesamtvarianz der Merkmalssummen und der Merkmalsdurchschnitte ausgehend von den Einheiten der untersten Stufe (für konstante

Auswahlsätze bzw. Auswahlseinheiten) über alle Einheiten mit den Gleichungen 59 und 60 geschätzt.

$$\text{var}(\hat{X}_\Sigma) = \text{var}\left(\frac{N_{\Sigma Q}}{n_{\Sigma Q}} \cdot \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_{II}} \dots \sum_{q=1}^{n_Q} \dot{x}_{i,j,\dots,q}\right) \quad \text{Gleichung 59}$$

$$\text{var}(\hat{X}) = \text{var}\left(\frac{1}{n_{\Sigma Q}} \cdot \sum_{i=1}^{n_I} \sum_{j=1}^{n_{II}} \dots \sum_{q=1}^{n_Q} \dot{x}_{i,j,\dots,q}\right) \quad \text{Gleichung 60}$$

4.4.3 Fehleranteil der einzelnen Auswahlstufen eines mehrstufigen Verfahrens

Auf jeder Teilungs- und Auswahlstufe können sowohl zufällige als auch systematische Fehler begangen werden, die entsprechend zum Gesamtfehler beitragen. Die zufälligen Fehleranteile werden durch die Heterogenität des Stoffsystems verursacht.

Ein geeignetes Modell zur Berechnung des gesamten Probenahmefehlers und der Fehleranteile auf den einzelnen Stufen ist die Varianzanalyse mit zufälligen Effekten. Das Modell wird auch als Modell der einfachen hierarchischen Klassifikation bezeichnet.

Für jede Auswahlstufe werden zufällige Fehler $\epsilon_{I,i}$ bis $\epsilon_{Q,i,j,\dots,q}$ beschrieben, die voneinander und untereinander als unabhängig angenommen werden. Damit erfolgt die Fehlerberechnung des varianzanalytischen Modells nach Gleichung 61.

$$\dot{x}_{i,j,\dots,q} = \mu + \epsilon_{I,i} + \epsilon_{II,i,j} + \dots + \epsilon_{Q,i,j,\dots,q} \quad \text{Gleichung 61}$$

μ wahrer Wert des Gesamtmittelwertes in der Grundgesamtheit

$\epsilon_{I,i}$ zufällige (angenähert normalverteilte) Abweichung des Mittelwertes μ_i , i -te Einheit vom Gesamtmittelwert

$\epsilon_{II,i,j}$ zufällige (angenähert normalverteilte) Abweichung des Mittelwertes μ_{ij} , zweite Stufe, j -te Einheit aus der i -ten Einheit erster Stufe von deren Mittelwert \bar{X}_i

$\epsilon_{Q,i,j,\dots,q}$ zufällige (annähert normalverteilte) Abweichung des Einzelwertes der Analysenprobe vom Mittelwert $\mu_{i,j,\dots,q-1}$ der vorletzten Stufe, q -te Einheit aus der die Analysenprobe stammt

Das Maß für den Gesamtfehler der Messwerte (Abweichung der Beobachtungswerte vom Gesamtmittelwert) ist die Gesamtvarianz $\text{var}(\epsilon_{Gesamt})$, die sich additiv aus den Varianzen der verschiedenen Stufen, wie in Gleichung 62 gezeigt, zusammensetzt.

$$\text{var}(\epsilon_{Gesamt}) = \text{var}(\epsilon_{I,i}) + \text{var}(\epsilon_{II,i,j}) + \dots + \text{var}(\epsilon_{Q,i,j,\dots,q}) \quad \text{Gleichung 62}$$

Die Schätzer für die Varianzanteile der einzelnen Stufen berechnen sich in den folgenden Gleichungen 63, 64 und 65.

Q. Stufe:

$$\text{var}(\epsilon_{Q,i,j,\dots,q}) = \frac{\sum_i \sum_j \dots \sum_q (\dot{x}_{i,j,\dots,q} - \bar{x}_{i,j,\dots,q-1})^2}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot (n_Q - 1)} \quad \text{Gleichung 63}$$

2. Stufe:

$$\text{var}(\epsilon_{II,i,j}) = \frac{1}{n_1(n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{1}{n_3 \cdot n_4 \cdot \dots \cdot n_Q} (\dot{x}_{i,j} - \bar{x}_i)^2 \quad \text{Gleichung 64}$$

1. Stufe:

$$\text{var}(\varepsilon_{I,i}) = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{1}{n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_Q} (\dot{x}_i - \bar{x}_I)^2 \quad \text{Gleichung 65}$$

4.4.4 Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert

Die Konfidenzintervalle für die Parameter der systematischen Auswahl berechnen sich analog der einfachen Zufallsauswahl durch Einsetzen der Schätzwerte und Varianzen der systematischen Auswahl in die in Kapitel 4.1.3 angegebenen Gleichungen.

4.5 Gebundene Zufallsstichprobe mit zwei Zufallsvariablen – Verhältnisschätzung

Bei der Verhältnis- oder Quotientenschätzung wird die Korrelation zwischen Zielgröße (Untersuchungsmerkmal) und einer weiteren Messgröße, dem sogenannten Basismerkmal, genutzt. Bei guter Korrelation der Variablen kann die Genauigkeit der Untersuchung erheblich verbessert werden.

4.5.1 Schätzung der Parameter Summe und Mittelwert

4.5.1.1 Für die Stichprobe

Für die Summe aus n Einheiten der Stichprobe müssen die Formeln in den Gleichungen 66 und 67 angewendet werden.

$$x_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad \text{Gleichung 66}$$

$$y_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n y_i = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad \text{Gleichung 67}$$

Für den Mittelwert aus n Einheiten der Stichprobe müssen die Formeln in den Gleichungen 68 und 69 angewendet werden.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{Gleichung 68}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n y_i = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \quad \text{Gleichung 69}$$

Für die Verhältniszahl zwischen Zielgröße und dem Basismerkmal wird die Formel in Gleichung 70 angewendet.

$$t = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{x_{\Sigma}}{y_{\Sigma}} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \quad \text{Gleichung 70}$$

4.5.1.2 Für die Grundgesamtheit

Für die Summe aus N Einheiten der Grundgesamtheit müssen die Formeln in den Gleichungen 71 und 72 angewendet werden.

$$X_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_N \quad \text{Gleichung 71}$$

$$Y_{\Sigma} = \sum_{i=1}^N Y_i = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N \quad \text{Gleichung 72}$$

Für den Mittelwert aus N Einheiten der Grundgesamtheit müssen die Formeln in den Gleichungen 73 und 74 angewendet werden.

$$\bar{X} = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N X_i = \frac{X_1+X_2+\dots+X_N}{N} \quad \text{Gleichung 73}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{Y_1+Y_2+\dots+Y_N}{N} \quad \text{Gleichung 74}$$

Für die Verhältniszahl zwischen Zielgröße und dem Basismerkmal wird die Formel in Gleichung 75 angewendet.

$$T = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{\sum_{i=1}^N Y_i} = \frac{X_\Sigma}{Y_\Sigma} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \quad \text{Gleichung 75}$$

Weiterhin muss die Abhängigkeit von Untersuchungsmerkmal und Basismerkmal durch den sogenannten Korrelationskoeffizienten r ermittelt werden. Für die Stichprobenwerte ergibt sich der Korrelationskoeffizient mit der Gleichung 76.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot (y_i - \bar{y})^2}} \quad \text{Gleichung 76}$$

Bei der Verhältnisschätzung wird die Gesamtsumme X_Σ bzw. der Gesamtmittelwert \bar{X} über die Schätzfunktion t aus der Stichprobe und der Summe bzw. dem Mittelwert des Basismerkmals geschätzt. Die Schätzwerte für die Parameter berechnen sich mit Gleichung 77 und 78.

$$\hat{X}_{\Sigma,VS} = \frac{N}{n} \cdot x_{\Sigma,VS} = t \cdot Y_\Sigma \quad \text{Gleichung 77}$$

$$\hat{X}_{VS} = \bar{x}_{VS} = t \cdot \bar{Y} \quad \text{Gleichung 78}$$

$\hat{X}_{\Sigma,VS}$ Schätzwert der Verhältnisschätzung für die Summe aus der Grundgesamtheit

\hat{X}_{VS} Schätzwert der Verhältnisschätzung für den Mittelwert aus der Grundgesamtheit

\bar{x}_{VS} Stichprobenmittelwert der Verhältnisschätzung

$x_{\Sigma,VS}$ Stichprobensumme der Verhältnisschätzung

4.5.2 Genauigkeit der geschätzten Parameter Summe und Mittelwert

Zur Berechnung der Varianzen der Schätzwerte werden die Varianzen der Einzelwerte in der Grundgesamtheit S^2 für das Untersuchungsmerkmal und das Basismerkmal benötigt. Die Varianzen S_x^2 und S_y^2 werden aus den Stichprobewerten (Stichprobenvarianzen s_x^2 und s_y^2) geschätzt. Damit errechnen sich die Schätzfunktionen für die Varianzen der Summe und des Mittelwertes mit den Gleichungen 79 und 80.

$$\text{var}(\hat{X}_{\Sigma,VS}) = s_{x_{\Sigma,VS}}^2 = \frac{N}{n} \cdot (s_x^2 + t^2 \cdot s_y^2 - 2 \cdot t \cdot r \cdot s_x \cdot s_y) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad \text{Gleichung 79}$$

$$\text{var}(\hat{X}_{VS}) = s_{\bar{x}_{VS}}^2 = \frac{1}{n} \cdot (s_x^2 + t^2 \cdot s_y^2 - 2 \cdot t \cdot r \cdot s_x \cdot s_y) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \quad \text{Gleichung 80}$$

Die Varianz des Schätzparameters hängt somit ab von den Faktoren:

- ▶ Stichprobenvarianz der Einzelwerte (s_x^2, s_y^2) von Untersuchungs- und Basismerkmal
- ▶ Verhältnisschätzwert t
- ▶ Korrelationskoeffizient r
- ▶ Stichprobenumfang n und dem als Endlichkeitskorrektur bezeichneten Faktor $\frac{N-n}{N-1}$

4.5.3 Konfidenzintervalle für die Parameter Summe und Mittelwert

Die Konfidenzintervalle für die Parameter der Verhältnisschätzung berechnen sich analog der für die einfache Zufallsauswahl beschriebenen Vorgehensweise durch Einsetzen der Schätzwerte und Varianzen in die in 4.1.3 angegebenen Gleichungen.

4.6 Untersuchung der Stoffströme einer Abfallbehandlungsanlage

4.6.1 Methodenauswahl

Bei der Untersuchung fester Siedlungsabfälle in Abfallbehandlungsanlagen wird aufgrund der Heterogenität gemischter Siedlungsabfälle eine hohe Anforderung an die Planung und praktische Ausführung der Probenahme gestellt. In (Hartung, 1987; Umweltbundesamt, 1993) werden geeignete Probenahmemethoden zur Untersuchung fester Siedlungsabfälle vorgestellt. Eine geeignete Methode zur Untersuchung der Stoffströme in Abfallbehandlungsanlagen ist die systematische Probenahme vom Band. Aus diesen Anforderungen leitet sich das anzuwendende statistische Auswertungsverfahren, die einfache oder geschichtete systematische Zufallsauswahl, ab.

4.6.2 Hochrechnung bei systematischer Zufallsauswahl

Auf der Grundlage einer gesicherten Probenahme erfolgt die Analyse der vorgegebenen Untersuchungsparameter. Die Analyse erzeugt zunächst Stichprobenergebnisse, die durch eine dem Auswahlverfahren analoge Hochrechnungsmethode auf die Grundgesamtheit (gesamter Abfallstrom bzw. Charge in einer Behandlungsanlage über ein bestimmtes Zeitintervall) hochgerechnet und bezüglich ihrer Genauigkeit bewertet werden müssen.

Als Fallbeispiel wurde die Metallabscheidung vom Band in einer Abfallbehandlungsanlage ausgewählt. Untersuchungsmerkmale sind die Eisen (Fe)- und Nichteisen (NE)-Metallanteile im Stoffstrom der Anlage nach der Metallabscheidung. In Tabelle 3 sind die Stichprobenergebnisse für die gemessenen Fe- und NE-Anteile nach Untersuchungstagen und Chargen dargestellt. Im ausgewählten Beispiel wurden insgesamt 27 Stichprobeneinheiten mit einem beprobten Volumen von 27 mal 40 Kubikdezimeter (dm³) entsprechend einem Probevolumen von 1.080 dm³ und einer Stichprobenmasse von ca. 63 kg analysiert.

Tabelle 3: Stichprobenmassen der Eisen- und Nichteisenmetalle im Materialstrom einer Abfallbehandlungsanlage nach der Fe- und NE-Metallabscheidung

Charge	Tag der Untersuchung	Proben Nr.	Fe-Metall in [g]	NE-Metall in [g]	Metalle Gesamt in [g]
A	01.06.05	A-P1-1	1,18	9,40	10,58
		A-P1-2	0,00	22,03	22,03
		A-P1-3	0,00	11,86	11,86
		Tagesmittel	0,39	14,43	14,82
	02.06.05	A-P2-1	0,52	6,30	6,82
		A-P2-2	1,41	11,31	12,72
		A-P2-3	0,71	12,88	13,59

Charge	Tag der Untersuchung	Proben Nr.	Fe-Metall in [g]	NE-Metall in [g]	Metalle Gesamt in [g]
		Tagesmittel	0,88	10,16	11,04
	03.06.05	A-P3-1	0,00	5,53	5,53
		A-P3-2	0,40	15,66	16,06
		A-P3-3	0,00	6,64	6,64
		Tagesmittel	0,13	9,27	9,41
B	08.06.05	B-P1-1	0,10	7,44	7,54
		B-P1-2	0,00	4,56	4,56
		B-P1-3	0,12	4,80	4,92
		Tagesmittel	0,07	5,60	5,67
	09.06.05	B-P2-1	0,22	3,12	3,34
		B-P2-2	0,43	7,68	8,11
		B-P2-3	0,19	3,12	3,31
		Tagesmittel	0,28	4,64	4,92
	10.06.05	B-P3-1	0,00	10,56	10,56
		B-P3-2	0,00	4,32	4,32
		B-P3-3	0,22	3,12	3,34
		Tagesmittel	0,07	6,00	6,07
C	15.06.05	C-P1-1	2,26	18,38	20,63
		C-P1-2	0,00	5,29	5,29
		C-P1-3	0,72	5,80	6,52
		Tagesmittel	0,99	9,82	10,82
	16.06.05	C-P2-1	7,81	0,00	7,81
		C-P2-2	23,03	10,23	33,26
		C-P2-3	0,00	17,76	17,76
		Tagesmittel	10,28	9,33	19,61
	17.06.05	C-P3-1	0,00	14,98	14,98
		C-P3-2	0,00	6,56	6,56
		C-P3-3	0,79	11,07	11,87
		Tagesmittel	0,26	10,87	11,13

Die Stichprobenergebnisse wurden nach der Methode der geschichteten systematischen Zufallsauswahl hochgerechnet. Die Schichtung erfolgte nach Abfallchargen. Entsprechend der Schichtverteilung wurde gewichtet hochgerechnet (proportionale Schichtung). Die Schichtverteilung ist als Schichtungsmatrix in Tabelle 4 dargestellt.

Tabelle 4: Schichtungsmatrix

Schicht Bezeichnung	Zeitraum	Wochendurchsatz [Mg/Woche]	Stichprobenmasse [kg/Woche]	Hochrechnungsfaktor [N/n]
Charge A	22. Kalenderwoche (KW)	1.433	21,11	14,7
Charge B	23. KW	1.430	21,33	14,9
Charge C	24. KW	1.362	20,56	15,1
Insgesamt		4.225	63,00	14,9

Zur Schätzung der wahren Fe- und NE-Metallanteile bzw. deren Massen in den Stoffströmen der Abfallbehandlungsanlage werden die in den Kapiteln 4.2 und 4.3 dargestellten Beziehungen für die systematische und die geschichtete Zufallsauswahl verwendet. Die gesuchten Metallanteile bzw. absoluten Massen berechnen sich nach Gleichungen 81 und 82.

$$\hat{A} = \sum_{h=1}^L \frac{M_h}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} a_{h,i} \cdot \frac{m_{h,i}}{m_h} \quad \text{Gleichung 81}$$

$$\hat{X}_\Sigma = \sum_{h=1}^L \frac{M_h}{m_h} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} x_{h,i} \quad \text{Gleichung 82}$$

\hat{A} geschätzter Anteil der Fe- bzw. NE-Metalle in der Grundgesamtheit

\hat{X}_Σ geschätzte Masse der Fe- bzw. NE-Metalle in der Grundgesamtheit

L Anzahl der Schichten

h, i Laufindizes für die Schichten (h), Stichproben (i)

M Massendurchsatz in der Grundgesamtheit

M_h Massendurchsatz in der h -ten Schicht in der Grundgesamtheit

m_h Massendurchsatz in der h -ten Schicht in der Stichprobe

$m_{h,i}$ Massendurchsatz in der h -ten Schicht, i -ten Stichprobe

n_h Anzahl der Stichproben in der h -ten Schicht

$a_{h,i}$ Stichprobenanteil (Tagesmittel) in der h -ten Schicht, i -ten Stichprobe

$x_{h,i}$ Stichprobenmasse (Tagesmittel) in der h -ten Schicht, i -ten Stichprobe

Die Genauigkeit der Untersuchungsergebnisse wird über die Varianz der Werte in der Grundgesamtheit geschätzt. Die Varianz der Metallanteile bzw. Massen berechnet sich für $N_h = k * n_h$ nach der Methode der geschichteten systematischen Zufallsauswahl entsprechend den Gleichungen 83 und 84.

$$\text{var}(\hat{A}) = \sum_{h=1}^L \frac{M_h^2}{M^2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} (a_{h,i} - \bar{a}_h)^2 \cdot \left(\frac{m_{h,i}}{m_h}\right)^2 \quad \text{Gleichung 83}$$

$$\text{var}(\hat{X}_\Sigma) = \sum_{h=1}^L \frac{M_h^2}{m_h} \cdot \frac{1}{m_h} \cdot \frac{n_h-1}{n_h} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} (x_{h,i} - \bar{x}_h)^2 \quad \text{Gleichung 84}$$

Mit Hilfe der geschätzten Varianz lassen sich dann Konfidenzintervalle für die im Mengenstrom nach der Metallabscheidung verbleibenden Fe- und NE-Metalle angeben. Die Berechnung der Varianzen ist für $f < 0,05$ in den Gleichungen 85 und 86 angegeben.

$$[\hat{A}_U; \hat{A}_O] = \hat{A} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\text{var}(\hat{A})} \quad \text{Gleichung 85}$$

$$[\hat{X}_{\Sigma;U}; \hat{X}_{\Sigma;O}] = \hat{X}_\Sigma \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\text{var}(\hat{X}_\Sigma)} \quad \text{Gleichung 86}$$

- $\text{var}(\hat{A})$ *Varianz des geschätzten Fe- bzw. NE-Anteils in der Grundgesamtheit*
- $\text{var}(\hat{X}_\Sigma)$ *Varianz der geschätzten Fe- bzw. NE-Masse in der Grundgesamtheit*
- \bar{a}_h *durchschnittlicher Fe- bzw. NE-Anteil in der h-ten Schicht in der Stichprobe*
- \bar{x}_h *durchschnittliche Fe- bzw. NE-Masse in der h-ten Schicht in der Stichprobe*
- N_h *Anzahl der Auswahleinheiten in der h-ten Schicht*
- k *Stichprobenintervall oder Abstand der Stichprobeneinheiten bei der systematischen Zufallsauswahl*

4.6.3 Darstellung der Ergebnisse

Auf Grundlage der Berechnungsgleichungen 83 bis 86 werden in den Tabelle 5 bis Tabelle 8 die hochgerechneten Ergebnisse (absolute Mengen und Anteile) der stofflichen Zusammensetzung und der Genauigkeit (Konfidenzintervalle) ausgewiesen. Die Ergebnisse der Hochrechnung werden für die gewünschten Aggregationsebenen nach Schichten und Stoffgruppen angegeben.

Tabelle 5: Hochgerechnete Mengen Fe- und NE-Metalle nach Chargen – Angaben in [kg/Woche]

Lfd.-Nr.	Sortierstoffgruppen	Charge A	Charge B	Charge C	Insgesamt
1	Fe-Metalle	286,3	85,3	2.292,6	2.664,2
2	NE-Metalle	6.899,0	3.265,8	5.966,9	16.131,7
3	Metalle Gesamt	7.185,4	3.351,0	8.259,5	18.795,9

Tabelle 6: Hochgerechnete Mengen Fe- und NE-Metalle nach Chargen - Angaben in [%]

Lfd.-Nr.	Sortierstoffgruppen	Charge A	Charge B	Charge C	Insgesamt
1	Fe-Metalle	0,020	0,006	0,168	0,063
2	NE-Metalle	0,481	0,228	0,438	0,382
3	Metalle-Gesamt	0,501	0,234	0,607	0,445

Tabelle 7: 95 % Konfidenzintervalle der Mengen Fe- und NE-Metalle - Angaben in [kg/Woche]

Lfd. Nr.	Sortierstoffgruppe	Schicht A Untere Grenze (UG)	Schicht A Obere Grenze (OG)	Schicht B UG	Schicht B OG	Schicht C UG	Schicht C OG	Gesamt UG	Gesamt OG
1	Fe-Metalle	47	526	23	147	0*	5.590	0*	5.599
2	NE-Metalle	4.570	9.228	2.130	4.402	3.281	8.652	12.820	19.443
3	Metalle Gesamt	4.864	9.506	2.220	4.482	4.329	12.190	14.622	22.969

*) negativer Bereich des Konfidenzintervalls

Tabelle 8: 95 % Konfidenzintervalle der Mengen Fe- und NE-Metalle - Angaben in [%]

Lfd. Nr.	Sortierstoffgruppe	Schicht A UG	Schicht A OG	Schicht B UG	Schicht B OG	Schicht C UG	Schicht C OG	Gesamt UG	Gesamt OG
1	Fe-Metalle	0,003	0,037	0,002	0,010	0*	0,411	0*	0,133
2	NE-Metalle	0,319	0,644	0,149	0,308	0,241	0,635	0,303	0,460
3	Metalle Gesamt	0,339	0,663	0,155	0,313	0,318	0,895	0,346	0,544

*) negativer Bereich des Konfidenzintervalls

Die Untersuchungsergebnisse lassen keine Rückschlüsse auf die Leistungsfähigkeit der Metallabscheidung zu, da es sich um ein Fallbeispiel handelt. Gleichwohl lassen sich generelle Aussagen zur statistischen Bewertung (Genauigkeit und Sicherheit) treffen.

Für den Parameter Fe-Anteil zeigt sich, dass sowohl die Größe der Einzelproben als auch die Anzahl der Stichproben zu gering angesetzt wurde. Es werden nur Schätzwerte mit geringer Genauigkeit (Abweichungen von mehr als 100 % vom geschätzten Wert) erreicht. Das liegt zum einen an den geringen Konzentrationswerten und zum anderen an den starken Messwertschwankungen, die insbesondere in Charge C zu beobachten sind.

Für den Parameter NE-Anteil wurden durchschnittliche Abweichungen vom Mittelwert von ca. 25 % festgestellt. Dies kann zur Beurteilung von Abfallchargen noch akzeptiert werden.

Für die gesamte Untersuchung bedeutet dies, dass die Stichprobenmenge für die NE-Metalle ausreichend und für die Fe-Metalle deutlich zu gering angesetzt wurde.

4.7 Untersuchung fester Siedlungsabfälle eines Entsorgungsgebietes

4.7.1 Methodenauswahl

Die Untersuchung fester Siedlungsabfälle für ein Entsorgungsgebiet gehört, aufgrund der Größe und der unterschiedlichen Verursacherstrukturen in der Grundgesamtheit sowie der starken Heterogenität des Feststoffsystems Siedlungsabfall, sicherlich zu den komplexesten Fragestellungen auf diesem Gebiet. Im Allgemeinen ist eine mehrstufige, geschichtete Zufallsauswahl erforderlich.

Für bestimmte Abfallarten der festen Siedlungsabfälle, die aufgrund ihrer stark variierenden Verursacherstruktur (z. B. Gewerbeabfälle) nur über nichtzufällige Auswahlverfahren nach dem Konzentrationsprinzip untersucht werden können, wird eine eigene spezifische Vorgehensweise beschrieben. Für die Untersuchung der festen Siedlungsabfälle eines Entsorgungsgebietes wird daher nachfolgend ein Fallbeispiel für die mehrstufige geschichtete zufällige Verhältnisauswahl und ein Fallbeispiel für ein nicht-zufälliges Auswahlverfahren nach dem Konzentrationsprinzip vorgestellt.

4.7.2 Hochrechnung bei mehrstufiger geschichteter zufälliger Verhältnisauswahl

Die Analyse einer zufälligen Probe fester Siedlungsabfälle erzeugt zunächst Stichprobenergebnisse, die durch eine dem Auswahlverfahren analoge Hochrechnungsmethode auf die Grundgesamtheit (gesamter fester Siedlungsabfall eines Entsorgungsgebietes) hochgerechnet und bezüglich ihrer Genauigkeit bewertet werden müssen. Zur Reduzierung des Stichprobenumfanges und damit des Untersuchungsaufwandes wird nach Möglichkeit eine weitere Zufallsvariable (angeschlossene Einwohner oder genutztes Behältervolumen) erhoben.

Bei der Bestimmung der stofflichen Zusammensetzung als Ziel der Untersuchung, liegen die Stichprobenergebnisse differenziert nach Stoffgruppen, Schichten und ggf.

Untersuchungskampagnen vor. In Tabelle 9 sind die Stichprobenergebnisse für eine Untersuchungskampagne nach Stoffgruppen und Schichten exemplarisch dargestellt.

Tabelle 9: Stichprobenergebnisse nach Stoffgruppen und Schichten

Sortierstoffgruppen	Schicht A	Schicht B	Schicht C	Untersuchungsgebiet
1	962,2	726,5	778,7	2.467,3
2	86,0	79,5	78,1	243,7
3	70,9	78,6	83,4	232,9
4	41,3	39,1	23,7	104,1
5	45,6	26,0	26,2	97,8
6	6,1	3,5	3,8	13,4
Ergebnis	1.212,0	953,3	993,8	3.159,2

Im ausgewählten Beispiel wurden insgesamt 36 Stichprobeneinheiten mit einem beprobten Volumen von 36 mal 1,1 m³ entsprechend einem Probevolumen von 39,6 m³ und einer Stichprobenmasse von 3.159 kg sortiert.

Die Stichprobenergebnisse werden differenziert nach Untersuchungskampagne und Schicht (Herkunft, Siedlungsstruktur, Art der Sammlung und Behältergröße) mit der Methode der mehrstufigen geschichteten Verhältnisschätzung hochgerechnet. Die Stichprobenergebnisse werden entsprechend der Schichtverteilung gewichtet hochgerechnet (proportionale Schichtung). Basisvariable für die Verhältnisschätzung ist das genutzte Behältervolumen. Die Schichtverteilung ist als Schichtungsmatrix in Tabelle 10 dargestellt.

Tabelle 10: Schichtungsmatrix

Schicht Bezeichnung	Einwohner	Bereitgestelltes Volumen [m ³ /Monat]	Volumenanteil [%]	Stichprobenanzahl [n]	Stichprobenvolumen [m ³]
Schicht A	81.710	5.529	33,9%	12	13,2
Schicht B	77.893	5.271	32,3%	12	13,2
Schicht C	38.947	5.500	33,7%	12	13,2
Summe	198.550	16.300	100,0%	36	39,6

Aufgrund der Komplexität des Untersuchungsgebietes wird ein mehrstufiges Auswahlverfahren angewandt. Das Untersuchungsgebiet wird nach Bezirken/Gemeinden, Wohnblöcke/Straßenzüge und Grundstücke/Behälter in drei Stufen eingeteilt. Durch das mehrstufige Auswahlverfahren wird der Planungs- und Analyseaufwand der Untersuchung deutlich reduziert. Es muss kein vollständiges Auswahlverzeichnis für alle Abfallbehälter des Untersuchungsgebietes erstellt werden. Auswahlverzeichnisse müssen jeweils nur für die nächsthöhere Ebene erstellt werden. D. h., für das gesamte Untersuchungsgebiet muss ein Auswahlverzeichnis der Bezirke/Gemeinden erstellt, für die ausgewählten Bezirke/Gemeinden ein Auswahlverzeichnis der Wohnblöcke/Straßenzüge und nur für die ausgewählten Wohnblöcke/Straßenzüge muss ein Auswahlverzeichnis für die Abfallbehälter erstellt werden. Die Einteilung des Untersuchungsgebietes in Stufen ist in Tabelle 11 dargestellt.

Tabelle 11: Einteilung nach Auswahlstufen

Auswahlstufe	Bezeichnung	Anzahl Gesamtheit [N]	Anzahl Stichproben [n]	Hochrechnungsfaktor
1. Auswahlstufe	Bezirke/ Gemeinden	38	6	6,3
2. Auswahlstufe	Wohnblöcke/ Straßenzüge	38 x 10*	6 x 3	21,6
3. Auswahlstufe	Grundstücke/ Behälter	38 x 10* x 42**	6 x 3 x 2	452,8

*) durchschnittliche Anzahl an Wohnblöcken/Straßenzügen pro Bezirk/Gemeinde

***) durchschnittliche Anzahl an Grundstücken/Behälter pro Wohnblock/Straßenzug

Als geeigneter Schätzwert für die Hochrechnung wird das Verhältnis aus Abfallmenge und genutztem Behältervolumen (alternativ die angeschlossenen Einwohner) verwendet. Die Zusammensetzung der festen Siedlungsabfälle nach Stoffgruppen berechnet sich für ein dreistufiges geschichtetes Verhältnisauswahlverfahren nach Gleichung 87.

$$\hat{X}_g = \sum_{h=1}^L \frac{V_h}{v_h} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} \frac{V_{h,i}}{v_{h,i}} \sum_{j=1}^{n_{h,i}} \frac{V_{h,i,j}}{v_{h,i,j}} \sum_{k=1}^{n_{h,i,j}} x_{g,h,i,j,k} \quad \text{Gleichung 87}$$

\hat{X}_g geschätzte Masse bzw. Anteil der g-ten Stoffgruppe in der Grundgesamtheit

L Anzahl der Schichten

g, h, i, j, k Laufindizes für die Stoffgruppen (g), Schichten (h), Auswahlstufen (i, j, k)

V_h genutztes Behältervolumen in der h-ten Schicht in der Grundgesamtheit

v_h	genutztes Behältervolumen in der h -ten Schicht in der Stichprobe
$V_{h,i}$	genutztes Behältervolumen in der h -ten Schicht, i -ten Gemeinde/Bezirk in der Grundgesamtheit
$v_{h,i}$	genutztes Behältervolumen in der h -ten Schicht, i -ten Gemeinde/Bezirk in der Stichprobe
$V_{h,i,j}$	genutztes Behältervolumen in der h -ten Schicht, i -ten Gemeinde/Bezirk, j -ten Wohnblock/Straßenzug in der Grundgesamtheit
$v_{h,i,j}$	genutztes Behältervolumen in der h -ten Schicht, i -ten Gemeinde/Bezirk, j -ten Wohnblock/Straßenzug in der Stichprobe
n_h	Anzahl der Stichproben in der h -ten Schicht
$n_{h,i}$	Anzahl der Stichproben in der i -ten Gemeinde, h -ten Schicht
$n_{h,i,j}$	Anzahl der Stichproben im j -ten Wohnblock, i -ten Gemeinde, h -ten Schicht
$\hat{x}_{g,h,i,j,k}$	Stichprobenmasse bzw. -anteil der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i,j,k -ten Auswahlstufe

Für die Genauigkeit der Untersuchungsergebnisse muss die Varianz der Werte in der Grundgesamtheit geschätzt werden. Die Varianz der Zusammensetzung der festen Siedlungsabfälle nach Stoffgruppen berechnet sich nach der Methode der mehrstufigen geschichteten zufälligen Verhältnisschätzung entsprechend der Gleichung 88.

$$\text{var}(\hat{X}_g) = \sum_{h=1}^L \frac{1-f_{h,1}}{n_{h,1}} \cdot \text{var}(x_{VS;I,g,h}) + \frac{f_{h,1} \cdot (1-f_{h,2})}{n_{h,2}} \cdot \text{var}(x_{VS;II,g,h}) + \frac{f_{h,1} \cdot f_{h,2} \cdot (1-f_{h,3})}{n_{h,3}} \cdot \text{var}(x_{VS;III,g,h}) \quad \text{Gleichung 88}$$

Die Varianzkomponenten der mehrstufigen geschichteten zufälligen Verhältnisschätzung $\text{var}(x_{I,g,h})$ bis $\text{var}(x_{III,g,h})$ berechnen sich anhand der Gleichungen 89, 90 und 91.

$$\text{var}(x_{VS;I,g,h}) = N_h^2 * \frac{1}{n_{h-1}} * \sum_{i=1}^{n_h} (t_{g,h,i} - t_{g,h})^2 = N_h^2 * \left(\text{var}(x_{g,h}) + t_{g,h}^2 + \text{var}(v_{g,h}) - 2 * t_{g,h} * \rho_{g,h} * \sqrt{\text{var}(x_{g,h}) * \text{var}(v_{g,h})} \right) \quad \text{Gleichung 89}$$

$$\text{var}(x_{VS;II,g,h}) = \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} \frac{N_{h,i}^2}{(n_{h,i}-1)} * \sum_{j=1}^{n_{h,i}} (t_{g,h,i,j} - t_{g,h,i})^2 = \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} N_{h,i}^2 (\text{var}(x_{g,h,i}) + t_{g,h,i}^2 * \text{var}(v_{g,h,i}) - 2 * t_{g,h,i} * \rho_{g,h,i} * \sqrt{\text{var}(x_{g,h,i}) * \text{var}(v_{g,h,i})}) \quad \text{Gleichung 90}$$

$$\text{var}(x_{VS;III,g,h}) = \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} \frac{1}{n_{h,i}} * \sum_{j=1}^{n_{h,i}} \frac{N_{h,i,j}^2}{(n_{h,i,j}-1)} * \sum_{k=1}^{n_{h,i,j}} (t_{g,h,i,j,k} - t_{g,h,i,j})^2 = \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} \frac{1}{n_{h,i}} * \sum_{j=1}^{n_{h,i}} N_{h,i,j}^2 * (\text{var}(x_{g,h,i,j}) + t_{g,h,i,j}^2 * \text{var}(v_{g,h,i,j}) - 2 * t_{g,h,i,j} * \rho_{g,h,i,j} * \sqrt{\text{var}(x_{g,h,i,j}) * \text{var}(v_{g,h,i,j})}) \quad \text{Gleichung 91}$$

Bei geringer Korrelation zwischen Untersuchungsmerkmal und Basismerkmal oder einem zu geringem Stichprobenumfang werden die Varianzkomponenten der mehrstufigen geschichteten Zufallsauswahl nach den Gleichungen 92, 93 und 94 berechnet.

$$\text{var}(x_{I,g,h}) = N_h^2 \cdot \frac{1}{n_h-1} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} (x_{g,h,i} - x_{g,h})^2 = N_h^2 \cdot \text{var}(x_{g,h}) \quad \text{Gleichung 92}$$

$$\text{var}(x_{II,g,h}) = \frac{1}{n_h} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} \frac{N_{h,i}^2}{(n_{h,i}-1)} \cdot \sum_{j=1}^{n_{h,i}} (x_{g,h,i,j} - x_{g,h,i})^2 = \frac{1}{n_h} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} N_{h,i}^2 \cdot \text{var}(x_{g,h,i}) \quad \text{Gleichung 93}$$

$$\text{var}(x_{III,g,h}) = \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} \frac{1}{n_{h,i}} * \sum_{j=1}^{n_{h,i}} \frac{N_{h,i,j}^2}{(n_{h,i,j}-1)} * \sum_{k=1}^{n_{h,i,j}} (x_{g,h,i,j,k} - x_{g,h,i,j})^2 = \frac{1}{n_h} * \sum_{i=1}^{n_h} \frac{1}{n_{h,i}} * \sum_{j=1}^{n_{h,i}} N_{h,i,j}^2 * \text{var}(x_{g,h,i,j}) \quad \text{Gleichung 94}$$

- $\text{var}(\hat{X}_g)$ Varianzschätzwert der Masse bzw. des Anteils der g-ten Stoffgruppe in der Grundgesamtheit
- $\text{var}(x_{VS,I,g,h})$ Verhältnis-Schätzfunktion für die Varianz der Masse bzw. des Anteils der g-ten Stoffgruppe, h-ten Schicht zwischen den Primäreinheiten (hier: Gemeinde/Bezirk)
- $\text{var}(x_{VS,II,g,h})$ Verhältnis-Schätzfunktion für die Varianz der Masse bzw. des Anteils der g-ten Stoffgruppe, h-ten Schicht, zwischen den Sekundäreinheiten (hier: Wohnblöcke/Straßenzüge)
- $\text{var}(x_{VS,III,g,h})$ Verhältnis-Schätzfunktion für die Varianz der Masse bzw. des Anteils der g-ten Stoffgruppe, h-ten Schicht, zwischen den Tertiäreinheiten (hier: Grundstücke/Abfallbehälter)
- $f_{h,1}$ Auswahlsatz der Primäreinheiten (hier: Gemeinde/Bezirk) in der h-ten Schicht n_h/N_h
- $f_{h,2}$ Auswahlsatz der Sekundäreinheiten (hier: Wohnblock/Straßenzug) in der h-ten Schicht n_{hi}/N_{hi}
- $f_{h,3}$ Auswahlsatz der Tertiäreinheiten (hier: Grundstück/Abfallbehälter) in der h-ten Schicht n_{hij}/N_{hij}
- $n_{h,1}$ Anzahl der Primäreinheiten (hier: Gemeinde/Bezirk) in der h-ten Schicht in der Stichprobe
- $n_{h,2}$ Anzahl der Sekundäreinheiten (hier: Wohnblock/Straßenzug) in der h-ten Schicht in der Stichprobe $n_h * n_{hi}$
- $n_{h,3}$ Anzahl der Tertiäreinheiten (hier: Grundstück/Abfallbehälter) in der h-ten Schicht in der Stichprobe $n_h * n_{hi} * n_{hij}$
- n_h Anzahl der Primäreinheiten in der h-ten Schicht in der Stichprobe
- $n_{h,i}$ Anzahl der Sekundäreinheiten in der i-ten Primäreinheit und h-ten Schicht in der Stichprobe
- $n_{h,i,j}$ Anzahl der Tertiäreinheiten in der j-ten Sekundäreinheit, i-ten Primäreinheit und h-ten Schicht in der Stichprobe
- N_h Anzahl der Primäreinheiten in der h-ten Schicht in der Grundgesamtheit
- $N_{h,i}$ Anzahl der Sekundäreinheiten in der i-ten Primäreinheit und h-ten Schicht in der Grundgesamtheit
- $N_{h,i,j}$ Anzahl der Tertiäreinheiten in der j-ten Sekundäreinheit, i-ten Primäreinheit und h-ten Schicht in der Grundgesamtheit
- $t_{g,h}$ Verhältnisschätzwert (Abfallmasse pro Volumen) der g-ten Stoffgruppe, h-ten Schicht (hier: hochgerechneter Wert pro Schicht)
- $t_{g,h,i}$ Verhältnisschätzwert (Abfallmasse pro Volumen) der g-ten Stoffgruppe, h-ten Schicht, i-ten Primäreinheit (hier: hochgerechneter Wert pro Gemeinde/Bezirk)

$t_{g,h,i,j}$	Verhältnisschätzwert (Abfallmasse pro Volumen) der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Primäreinheit, j -ten Sekundäreinheit (hier: hochgerechneter Wert pro Wohnblock/Straßenzug)
$\rho_{g,h}$	Korrelationskoeffizient (aus Abfallmasse und Volumen) der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht (hier: hochgerechneter Wert pro Schicht)
$\rho_{g,h,i}$	Korrelationskoeffizient (aus Abfallmasse und Volumen) der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Primäreinheit (hier: hochgerechneter Wert pro Gemeinde/Bezirk)
$\rho_{g,h,i,j}$	Korrelationskoeffizient (aus Abfallmasse und Volumen) der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Primäreinheit, j -ten Sekundäreinheit (hier: hochgerechneter Wert pro Wohnblock/Straßenzug)
$x_{g,h}$	Schätzwert (Abfallmasse bzw. Anteil) der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht (hier: hochgerechneter Wert pro Schicht)
$x_{g,h,i}$	Schätzwert (Abfallmasse bzw. Anteil) der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Primäreinheit (hier: hochgerechneter Wert pro Gemeinde/Bezirk)
$x_{g,h,i,j}$	Schätzwert (Abfallmasse bzw. Anteil) der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Primäreinheit, j -ten Sekundäreinheit (hier: hochgerechneter Wert pro Wohnblock/Straßenzug)
$\dot{x}_{g,h,i,j,k}$	Stichprobenmasse bzw. -anteil der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Primäreinheit, j -ten Sekundäreinheit, k -ten Tertiäreinheit
$var(x_{g,h})$	Schätzfunktion für die Varianz der Masse bzw. des Anteils der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht
$var(x_{g,h,i})$	Schätzfunktion für die Varianz der Masse bzw. des Anteils der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht und i -ten Gemeinde/Bezirk
$var(x_{g,h,i,j})$	Schätzfunktion für die Varianz der Masse bzw. des Anteils der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Gemeinde/Bezirk und j -ten Wohnblock/Straßenzug
$var(v_h)$	Schätzfunktion für die Varianz des genutzten Behältervolumens in der h -ten Schicht
$var(v_{h,i})$	Schätzfunktion für die Varianz des genutzten Behältervolumens in der h -ten Schicht und in der i -ten Gemeinde/Bezirk
$var(v_{h,i,j})$	Schätzfunktion für die Varianz des genutzten Behältervolumens in der h -ten Schicht, i -ten Gemeinde/Bezirk und im j -ten Wohnblock/Straßenzug

Die Fehleranteile der einzelnen Schichten und Auswahlstufen werden mithilfe eines varianzanalytischen Modells mit zufälligen Effekten geschätzt. Der Mittelwert im dreistufigen Modell wird anhand der Gleichung 95 berechnet.

$$\dot{x}_{i,j,k} = \mu + \epsilon_{I,i} + \epsilon_{II,i,j} + \epsilon_{III,i,j,k} \quad \text{Gleichung 95}$$

Ein geeignetes Fehlermaß für den zufälligen Gesamtfehler ϵ_{Gesamt} ist die Varianz, welche anhand der Gleichung 96 berechnet wird.

$$var(\epsilon_{Gesamt}) = var(\epsilon_{I,i}) + var(\epsilon_{II,i,j}) + var(\epsilon_{III,i,j,k}) \quad \text{Gleichung 96}$$

Die Varianzeffekte bzw. die Fehler, welche durch die einzelnen Teilungs- und Auswahlstufen begangen werden, werden mit den Gleichungen 97, 98 und 99 berechnet.

$$\text{var}(\epsilon_{III,i,j,k}) = \text{var}(x_{VS;III,g,h}) \quad \text{Gleichung 97}$$

$$\text{var}(\epsilon_{II,i,j}) = \frac{\text{var}(x_{VS;II,g,h})}{N_{h,i}^2} - \frac{\text{var}(x_{VS;III,g,h})}{n_{h,3}} \quad \text{Gleichung 98}$$

$$\text{var}(\epsilon_{I,i}) = \frac{\text{var}(x_{VS;I,g,h})}{N_h^2 * N_{h,i}^2} - \frac{\text{var}(x_{VS;II,g,h})}{N_{h,i}^2 * n_{h,i}^2 * n_{h,i,j}^2} \quad \text{Gleichung 99}$$

Die Genauigkeit wird in Form von Variationskoeffizienten, als relative Streuung und in Form von Konfidenzintervallen, um die ein geschätzter Wert „streu“ darf, ausgewiesen. Die Variationskoeffizienten berechnen sich nach Gleichung 100. Die Konfidenzintervalle zur Angabe der Genauigkeit der geschätzten Massen und Anteile berechnen sich mit Hilfe der Varianz nach Gleichung 101.

$$\text{varkoeff}(\hat{X}_g) = \frac{\sqrt{\text{var}(\hat{X}_g)}}{\hat{X}_g} \quad \text{Gleichung 100}$$

$$\hat{X}_g - t_{1-\alpha/2;n-1} \cdot \frac{\hat{X}_g \cdot \text{var koeff}(\hat{X}_g)}{\sqrt{n}} \leq X_g \leq \hat{X}_g + t_{1-\alpha/2;n-1} \cdot \frac{\hat{X}_g \cdot \text{var koeff}(\hat{X}_g)}{\sqrt{n}} \quad \text{Gleichung 101}$$

$t_{1-\alpha/2;n-1}$ Schätzfunktion für die Varianz der Masse bzw. des Anteils der g -ten Stoffgruppe, h -ten Schicht, i -ten Gemeinde/Bezirk und j -ten Wohnblock/Straßenzug

n Stichprobenanzahl

X_g wahrer Wert der Masse bzw. des Anteils in der Grundgesamtheit

4.7.2.1 Darstellung der Ergebnisse

Auf Grundlage der in Kapitel 4.7.2 hergeleiteten Berechnungsgleichungen werden in Tabelle 12 bis Tabelle 15 die hochgerechneten Ergebnisse (absolute Mengen und Anteile) der stofflichen Zusammensetzung und der Genauigkeit (Konfidenzintervalle) ausgewiesen. Die Ergebnisse der Hochrechnung werden für die gewünschten Aggregationsebenen nach Schichten und Stoffgruppen angegeben.

Tabelle 12: Hochgerechnete Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [Mg/Jahr]

Sortierstoffgruppen	Schicht A	Schicht B	Schicht C	Untersuchungsgebiet
1	5.320	3.829	4.283	13.432
2	476	419	430	1.325
3	392	414	459	1.265
4	228	206	130	565
5	252	137	144	533
6	34	19	21	73
Ergebnis	6.701	5.025	5.466	17.192

Tabelle 13: Hochgerechnete Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [%]

Sortierstoffgruppen	Schicht A	Schicht B	Schicht C	Untersuchungsgebiet
1	79,4	76,2	78,4	78,1
2	7,1	8,3	7,9	7,7
3	5,8	8,2	8,4	7,4
4	3,4	4,1	2,4	3,3
5	3,8	2,7	2,6	3,1
6	0,5	0,4	0,4	0,4
Ergebnis	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabelle 14: 95 % Konfidenzintervalle der Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [Mg/Woche]

Stoffgruppe	Schicht A UG	Schicht A OG	Schicht B UG	Schicht B OG	Schicht C UG	Schicht C OG	Untersuchungsgebiet UG	Untersuchungsgebiet OG
1	4.926	5.714	2.509	5.149	4.230	4.336	12.160	14.704
2	301	651	296	543	337	523	1.109	1.540
3	211	572	396	433	68	849	868	1.662
4	89	368	133	280	101	159	417	713
5	53	451	122	152	43	244	327	739
6	5	63	6	31	11	30	43	103
Ergebnis	6.565	6.838	3.732	6.318	4.796	6.137	15.843	18.542

Tabelle 15: 95 % Konfidenzintervalle der Jahresmengen der Haushaltsabfälle nach Stoffgruppen und Schichten - Angaben in [%]

Stoffgruppe	Schicht A UG	Schicht A OG	Schicht B UG	Schicht B OG	Schicht C UG	Schicht C OG	Untersuchungsgebiet UG	Untersuchungsgebiet OG
1	73,5	85,3	49,9	102,5	77,4	79,3	70,7	85,5
2	4,5	9,7	5,9	10,8	6,2	9,6	6,5	9,0
3	3,2	8,5	7,9	8,6	1,3	15,5	5,0	9,7
4	1,3	5,5	2,6	5,6	1,9	2,9	2,4	4,1
5	0,8	6,7	2,4	3,0	0,8	4,5	1,9	4,3
6	0,1	0,9	0,1	0,6	0,2	0,6	0,2	0,6
Ergebnis	98,0	102,0	74,3	125,7	87,7	112,3	92,1	107,9

Die Untersuchungsergebnisse lassen keine Bewertung der stofflichen Zusammensetzung zu, da es sich um ein Fallbeispiel handelt. Gleichwohl lassen sich generelle Aussagen zur statistischen Bewertung (Genauigkeit und Sicherheit) treffen. Die hochgerechnete Jahresmenge von 17.192 Mg pro Jahr unterliegt einer Abweichung von + 7,9 %. Damit wird das vorgegebene Untersuchungsziel von + 10 % sicher eingehalten.

Die methodische Vorgehensweise der dreistufig geschichteten Zufallsauswahl ermöglicht in der Auswertung eine differenzierte Fehleranalyse nach Auswahlstufen. In Tabelle 16 werden die relativen Fehleranteile der einzelnen Auswahlstufen bezogen auf den Gesamtfehler angegeben. Es zeigt sich, dass der größte Beitrag zum gesamten Untersuchungsfehler jeweils auf der dritten Stufe, d. h. bei der Auswahl der Grundstücke bzw. Abfallbehälter begangen wird. Tabelle 16 ist weiterhin zu entnehmen, dass 92 % des Gesamtfehlers, durch die Auswahl der Stichprobeneinheiten auf der dritten Stufe verursacht werden.

Tabelle 16: Relative Fehleranteile der Stichprobenuntersuchung nach Stoffgruppen, Auswahlstufen und Schichten - Angaben in [%]

Sortierstoffgruppen	Auswahlstufen	Schicht A	Schicht B	Schicht C	Untersuchungsgebiet
1	1	2%	30%	20%	0,3%
	2	36%	19%	29%	7%
	3	62%	51%	51%	93%
2	1	31%	11%	-7%	0,6%
	2	37%	57%	46%	14%
	3	32%	33%	61%	85%
3	1	8%	-11%	18%	0,1%
	2	22%	62%	6%	3%
	3	71%	49%	76%	97%
4	1	-1%	7%	-1%	0,2%
	2	96%	30%	-1%	22%
	3	6%	63%	102%	78%
5	1	2%	-4%	-4%	0,1%
	2	25%	29%	39%	5%
	3	73%	75%	65%	95%
6	1	4%	20%	-1%	0,1%
	2	24%	28%	7%	6%
	3	72%	52%	94%	94%
Ergebnis	1	-6%	34%	1%	0,2%
Ergebnis	2	31%	26%	60%	7%

Sortierstoffgruppen	Auswahlstufen	Schicht A	Schicht B	Schicht C	Untersuchungsgebiet
Ergebnis	3	75%	40%	39%	92%

Negative Varianzen sind modellbedingt

Aufgrund des methodischen Aufbaus der Untersuchung nach Schichten, Auswahlgebieten und unter Einbeziehung einer zweiten Zufallsvariable können anhand der in Kapitel 4 hergeleiteten Berechnungsformeln Ergebnisse für verschiedene Hochrechnungs- bzw. Schätzmethoden berechnet werden. Dies ist insbesondere für einen methodischen Vergleich der Auswertungsverfahren von Interesse. In Tabelle 17 werden die Varianzen und die erzielbare Genauigkeit der Schätzverfahren „Ungeschichtete Schätzung“, „Geschichtete Schätzung“, „Geschichtete Verhältnisschätzung“, „3-stufige geschichtete Schätzung“ und „3-stufige geschichtete Verhältnisschätzung“ verglichen.

Tabelle 17: Vergleich der Genauigkeit verschiedener Hochrechnungsmethoden - Angaben als Varianzen in [Mg²/a²]

Sortierstoffgruppen	Ungeschichtete Schätzung	Geschichtete Schätzung	Geschichtete Verhältnisschätzung	3-stufige geschichtete Schätzung	3-stufige geschichtete Verhältnisschätzung
1	569.908	525.278	538.395	392.670	845.205
2	5.779	6.052	5.797	11.261	12.447
3	17.933	19.029	15.340	38.259	19.213
4	5.282	5.141	5.411	5.303	4.313
5	15.336	16.032	14.975	10.301	7.328
6	307	324	352	223	251
Ergebnis	585.079	521.422	471.972	442.067	444.400
	± 8,7	± 8,2	± 7,8	± 7,6	± 7,6

Der Vergleich unterschiedlicher Hochrechnungs- bzw. Schätzverfahren (Tabelle 17) zeigt, dass die beste Genauigkeit mit der Methode der 3-stufigen geschichteten Schätzung bzw. der 3-stufigen geschichteten Verhältnisschätzung erzielt wurde. Die Verhältnisschätzung ist der einfachen Schätzung dann überlegen, wenn der Stichprobenumfang ausreichend groß ist (in jeder Schicht und auf jeder Auswahlstufe mindestens 30 Einheiten) und der Korrelationskoeffizient größer als 0,25 ist. Der Korrelationskoeffizient der Untersuchung, berechnet aus der jeweiligen Gesamtmasse pro Stichprobe und dem dazugehörigen genutzten Behältervolumen, betrug 0,249. Somit konnten die Vorteile der Verhältnisschätzung bei dieser Beispieluntersuchung nicht zum Tragen kommen. Dem Vergleich der Hochrechnungsverfahren ist weiterhin zu entnehmen, dass mit der methodisch korrekten Auswertungsmethode ein Genauigkeitsvorteil von ca. 14 % gegenüber der ungeschichteten Auswertung und ein Genauigkeitsvorteil von 3 % gegenüber der einstufigen geschichteten Verhältnisschätzung erzielt wird. Die komplizierte und aufwändige Auswertungsmethode der dreistufigen geschichteten Verhältnisschätzung kann vertretbar durch die einstufige Berechnung ersetzt

werden. Bei guter Korrelation zwischen Untersuchungsmerkmal und Basismerkmal ($r > 0,25$) sollte unbedingt die Verhältnisschätzung angewandt werden.

4.7.3 Hochrechnung bei nichtzufälligen Auswahlverfahren nach dem Konzentrationsprinzip

4.7.3.1 Methodenauswahl

Für die Untersuchung fester Abfälle eines Entsorgungsgebietes, die aus wenigen Stoffkomponenten bestehen und gering durchmischt sind, für die aber keine einheitliche Verursacherstruktur definiert werden kann, sind Stichprobenverfahren mit geringen Auswahlätzen, wie in Kapitel 4.7.2 beschrieben, nicht zielführend. Hausmüllähnliche und produktionsspezifische Gewerbeabfälle, die in Wechselbehältern erfasst oder durch die Gewerbebetriebe selbst angeliefert werden, gehören zu dieser Abfallkategorie.

Die stark variierende Verursacherstruktur – selbst Betriebe einer Branche erzeugen oft sehr unterschiedliche Gewerbeabfälle (Umweltbundesamt, 1993) – zwingt zu einem Untersuchungsverfahren, das einen möglichst großen Anteil der Grundgesamtheit in die Untersuchung einbezieht. Dies kann unter wirtschaftlichen Bedingungen nur auf Kosten der Untersuchungstiefe erreicht werden.

Für die Untersuchung der beschriebenen Gewerbeabfälle eignet sich daher nur eine Methode, die möglichst viele Untersuchungseinheiten (Fahrzeugladungen aus den Gewerbebetrieben) nach dem Konzentrationsprinzip erfasst und durch ein weniger aufwändiges und kostengünstiges Analyseverfahren – die optische Klassifikation – untersucht.

Bei der Untersuchung fester Abfälle aus Gewerbebetrieben ist im Allgemeinen eine geschichtete Konzentrationsauswahl erforderlich.

4.7.3.2 Auswertung

Die optische Klassifikation liefert untersuchungsbedingt volumenbezogene Stoffzusammensetzungen, da visuell nur Volumenanteile hinreichend gut geschätzt werden können (Umweltbundesamt, 1993). Die volumenbezogenen Stichprobenergebnisse müssen in massebezogene Stoffzusammensetzungen umgerechnet werden. Bei der optischen Klassifikation werden die Masse und das Volumen jeder Abfallanlieferung aufgenommen und die Volumenanteile der Stoffgruppen jeder Abfallanlieferung geschätzt. Da die Abfalldichten (Raumdichten) der einzelnen Stoffgruppen je nach Abfallgemisch und Fahrzeugtyp stark variieren, kann für die Umrechnung in Massenanteile keine durchschnittliche Dichtetabelle für die Stoffgruppen eingesetzt werden. Die Dichtewerte müssen spezifisch für jede Gewerbeabfalluntersuchung bestimmt werden. Sie können nicht aus anderen Untersuchungen übertragen werden.

Ein zuverlässiges Verfahren zur Bestimmung der Raumdichten je Stoffgruppe und Fahrzeugtyp ist die multiple lineare Regression. Dabei lässt sich folgender Zusammenhang zwischen der Abfallmasse der gesamten Abfallanlieferung, dem geschätzten Abfallvolumen der Stoffgruppen je Abfallanlieferung und der gesuchten Raumdichte der Stoffgruppen pro Fahrzeugtyp (Schicht) in Gleichung 102 oder für das gesamte Abholgebiet in Gleichung 103 herstellen.

$$m = \sigma_1 \cdot v_{1,1} \cdot n_{1,1} + \sigma_2 \cdot v_{2,2} \cdot n_{2,2} + \dots + \sigma_q \cdot v_{q,w} \cdot n_{q,w} = \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^w \sigma_j \cdot v_{j,k} \cdot n_{j,k}$$

Gleichung 102

$$m = \sigma_1 \cdot v_1 + \sigma_2 \cdot v_2 + \dots + \sigma_q \cdot v_q = \sum_{j=1}^q \sigma_j \cdot v_j$$

Gleichung 103

m	Masse aller Fahrzeugladungen
σ_j	Raumdichte der j -ten Stoffgruppen
$v_{j,k}$	Volumen der j -ten Stoffgruppe und k -ten Fahrzeugladung
$n_{j,k}$	Anzahl der Fahrzeugladungen mit der Stoffgruppe j
v_j	gesamtes Volumen der j -ten Stoffgruppe $v_j = \sum_{k=1}^w v_{j,k} \cdot n_{j,k}$
j	Laufindex für die Anzahl der Stoffgruppen
k	Laufindex für die Anzahl der Fahrzeugladungen
q	Anzahl der Stoffgruppen
w	Anzahl der Fahrzeugladungen

Mit der multiplen linearen Regressionsanalyse kann die in Kapitel 4.1.3 Gleichung 23 hergeleitete Beziehung gelöst werden. Die allgemeine multiplen lineare Regressionsanalyse hat die Form in Gleichung 104.

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_q \cdot x_q$$

Gleichung 104

Mit dieser Gleichung lassen sich die Koeffizienten b_j (b_1 bis b_q) schätzen, wobei q die Anzahl der unabhängigen Variablen ist, die mit x_1 bis x_q bezeichnet sind; b_0 ist eine Konstante. Die unabhängigen (erklärenden) Variablen können dabei selbst untereinander korrelieren, was bei der Schätzung der Koeffizienten entsprechend berücksichtigt wird, um Scheinkorrelationen zu verhindern.

Zur Schätzung von b_1 bis b_q müssen nun n Beobachtungen der Merkmale y, x_1, \dots, x_n vorliegen. D. h. y ist ein mehrdimensionaler Vektor $y = (y_1, \dots, y_n)$; x_1 ist ein mehrdimensionaler Vektor $x_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{1,n})$ usw. Folgendes lineares Modell in Gleichung 105 wird zur Schätzung der Koeffizienten b_j für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, q$ verwendet.

$$y_i = b_0 + b_1 \cdot x_{i,1} + b_2 \cdot x_{i,2} + \dots + b_q \cdot x_{i,q} + e_i$$

Gleichung 105

Nach der Gauß'schen Methode der kleinsten Fehlerquadrate können die b_j nun so bestimmt werden, dass der Fehler ϵ_i minimal wird. Die Berechnung der Schätzwerte für b_j erfolgt über ein Normalgleichungssystem und aufgrund der Komplexität wird mit Matrizen gerechnet. (Auf die Berechnungsgleichungen wird hier nicht näher eingegangen. Ausführliche Beschreibungen finden sich z. B. in (Hartung et al., 2007). Neben Punktschätzern für b_j können auch Konfidenzintervalle für diese Parameter angegeben werden.

Im Berechnungsmodell für die Raumdichten entsprechen die Koeffizienten b_1 bis b_q aus dem allgemeinen Regressionsmodell den Raumdichten σ_1 bis σ_q . Der Koeffizient b_0 im allgemeinen Regressionsmodell ist im Berechnungsmodell für die Raumdichten gleich Null (daher ist $\sigma_0 = 0$ und entfällt). Die Raumdichten können mit dem Ansatz der multiplen linearen Regression geschätzt werden.

Raumdichten wurden beispielsweise von Barghoorn (Barghoorn, 1994) in der Berliner Gewerbeabfallerhebung 1993/94 bestimmt und sind Tabelle 18 zu entnehmen.

Tabelle 18: Durchschnittliche Raumdichten von Gewerbeabfall-Fahrzeugladungen in Berlin 1993/94 – Angaben in [kg/m³]

Stoffgruppe	Container-fahrzeug	Presscontainer-fahrzeug	Umleer-fahrzeug	Sonstige Fahrzeuge
Pappe Verpackungen (Verpack.)	101	145	145*	59
Kunststoff (Verpack.)	138	196	198*	66
Holz (Verpack.)	121	190*	180*	95
Styropor (Verpack.)	49*	55*	55*	49
Metall (Verpack.)	226	226**	226*	226*
Hausmüllartiger Abfall (Abf.)	300*	430	430*	250*
Kunststoff (sonst.)	204	270	368	200
Sperrmüll (Rest)	134	197	220*	102
Möbel (Holz)	161	220*	220*	103
Polstermöbel	150	180*	180*	105
Metallische Abf.	86**	188*	188*	89
Bauschutt, Inertes	166**	270*	270*	175
Renovierungsmüll	203	300*	300*	142
Glasabfälle	686	620*	620*	220**
Textilien	183	250*	250*	120
Produktspezifischer Abf.	350	500*	500*	250*
Sonst./nicht klassifizierbar	264	201	200*	161
Anzahl von Fahrzeugladungen	521.422	471.972	442.067	444.400

*) Raumdichten geschätzt

***) Raumdichten aus der Gewerbeabfallerhebung von 1989/90 (Barghoorn et al., 1990)

Die in Massenanteile umgerechneten Stichprobenergebnisse werden nach der Methode der geschichteten Zufallsauswahl auf das gesamte Untersuchungsgebiet nach Gleichung 106 hochgerechnet.

$$\hat{X}_{g,\Sigma} = \sum_{h=1}^L \frac{M_h}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n_h} x_{g,h,i} \quad \text{Gleichung 106}$$

M_h Gewerbeabfallmasse in der h -ten Schicht in der Grundgesamtheit

M Gewerbeabfallmasse in der Grundgesamtheit

$x_{g,h,i}$ Masse der g -ten Stoffgruppe in der h -ten Schicht, i -ten Stichprobe

5 Schlussbemerkungen

Die Untersuchung fester Abfälle verlangt aufgrund der heterogenen Struktur dieses Stoffsystems eine hohe Qualifikation der Ausführenden in den Bereichen Probenahme, Probenaufbereitung, Analytik und Auswertung. Untersuchungen für Planungs- und Überwachungsaufgaben und zur Qualitätskontrolle sollten daher nur von sachkundigen Unternehmen ausgeführt werden.

Nur die Auswahl der richtigen Probenahmemethode, die sorgfältige Ausführung der Probenahme, Probenaufbereitung und Analyse sowie die richtige Auswertung (Hochrechnung und Fehlerbetrachtung) liefern zuverlässige und vertrauenswürdige Ergebnisse. Um im Bereich der Auswertung von Abfalluntersuchungen Fehler zu vermeiden, sollten folgende Aspekte beachtet werden:

- ▶ Stichprobenmethode und Auswertungsmethode sind vor der Untersuchung festzulegen und aufeinander abzustimmen. Die Hochrechnung/Schätzung muss unter Anwendung des korrekten Schätzverfahrens ausgeführt werden.
- ▶ Es müssen die richtigen Verteilungsannahmen für das Untersuchungsmerkmal zugrunde gelegt werden.
- ▶ Korrelationseinflüsse müssen identifiziert und berücksichtigt werden. Damit werden Untersuchungsgesamtheiten mit korrelierenden Merkmalen erkannt, Schätzfehler durch Korrelationseinflüsse vermieden und effektive Schichtungen sowie Verhältnisschätzungen sichergestellt.
- ▶ Vereinfachungen des Auswahl- bzw. Hochrechnungsmodells sind nur zulässig, wenn sie im Rahmen einer Stichprobenkonzeption begründet sind.

Ansonsten ist mit verzerrten Ergebnissen und einer Verschlechterung der Untersuchungsgenauigkeit zu rechnen.

6 Quellenverzeichnis

- ARGUS - Arbeitsgruppe Umweltstatistik e. V. an der Technischen Universität Berlin. [Hrsg.] (1997): Abfallerhebung Berlin. Berlin.
- ARGUS – Statistik und Informationssysteme in Umwelt und Gesundheit GmbH. [Hrsg.] (2003): Untersuchung der Zusammensetzung des Berliner Restabfalls aus der Systemabfuhr 2002/03. Berlin.
- Barghoorn, M., Gössele, P., et al. (1980): Bundesweite Hausmüllanalyse 1979/80. Arbeitsgruppe Umweltstatistik der Technischen Universität Berlin, Berlin.
- Barghoorn, M.; Elsholz, A.; Riehl, A. E.; Röck, A. (1990): Berliner Gewerbeabfalluntersuchung 1989/90. Im Auftrag der Senatsverwaltung für Stadtentwicklung und Umweltschutz Berlin, Berlin.
- Barghoorn, M. & Lemke, R. (1994): Berliner Gewerbeabfalluntersuchung 1993/94. Im Auftrag der Senatsverwaltung für Stadtentwicklung und Umweltschutz Berlin, Berlin.
- Bauer, R. K.; Barghoorn, M.; Fuchs, J.; Gössele, P. (1977): Stichprobenplanung, Vorlauf, Ergebnisse der Berliner Hausmüllanalyse 1976. Berlin.
- Blottnitz, H. B. von (1999): Untersuchung zur Weiterentwicklung der Grundlagen der Probenahme disperser Feststoffe für Bereiche der Abfallwirtschaft (Dissertation). RWTH Aachen, Shaker Verlag, Aachen.
- Cochran, W. G. (1972): Stichprobenverfahren. De Gruyter, Berlin – New York. ISBN 9783110020403.
- Dornbusch, H.-J.; Hannes, L.; Santjer, M.; Böhm, C.; Wüst, S.; Zwisele, B.; Kern, M.; Siepenkothen, H.-J.; Kanthak, M. (2020): Vergleichende Analyse von Siedlungsrestabfällen aus repräsentativen Regionen in Deutschland zur Bestimmung des Anteils an Problemstoffen und verwertbaren Materialien. UBA-Texte 113/2020. <https://www.umweltbundesamt.de/publikationen/vergleichende-analyse-von-siedlungsrestabfaellen> (abgerufen am 17.06.2024).
- Gy, P. (1992): Sampling of heterogeneous and dynamic material systems: theories of heterogeneity, sampling and homogenizing. Elsevier, Amsterdam. ISBN 9780444556066.
- Hartung, J. (1987): Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. 6. Auflage, De Gruyter, München – Wien – Oldenburg. ISBN 9783486590289.
- Hartung, J.; Elpelt, B.; Klösener, K.-H. (2007): Multivariate Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. 7. Auflage. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München. ISBN 9783486582345.
- LfU RIP - Landesamt für Umwelt Rheinland-Pfalz. [Hrsg.] (2022): Richtlinie zur Analyse von Restabfall in Rheinland-Pfalz nach dem Stand der Technik 2022, Mainz. <https://lfu.rlp.de/fileadmin/lfu/UMWELT/Kreislaufwirtschaft/SortierrichtlinieRestabfall.pdf>. (abgerufen am 30.07.2025).
- LfULG - Sächsisches Landesamt für Umwelt, Geologie und Landwirtschaft. [Hrsg.] (2014): Richtlinie zur einheitlichen Abfallanalytik in Sachsen - Sächsische Sortierrichtlinie, Eigenverlag, Dresden. <https://publikationen.sachsen.de/bdb/artikel/23865>. (abgerufen am 30.07.2025).
- Landesumweltamt Brandenburg. [Hrsg.] (1998): Richtlinie für die Durchführung von Untersuchungen zur Bestimmung der Menge und Zusammensetzung fester Siedlungsabfälle im Land Brandenburg. Teil L. ORLIS Repositorium. <https://orlis.difu.de/items/b0e81843-8f6f-4597-acb1-a30ad9215a8f> (abgerufen am 04.06.2025).
- LAGA - Bund/Länder-Arbeitsgemeinschaft Abfall. [Hrsg.] (2001): LAGA PN 98 Richtlinie für das Vorgehen bei physikalischen, chemischen und biologischen Untersuchungen im Zusammenhang mit der Verwertung/Beseitigung von Abfällen. https://www.laga-online.de/documents/m32_laga_pn98_1503993280.pdf (abgerufen am 20.03.2025).

- Nothbaum, N. (1997): Probenahmestrategien bei der Bewertung von Altlasten. In Tagungsbeiträge 3. Tagung des Arbeitskreises Probenahme (V1 S. 5ff). IQS, Freiberg.
- Pohlmann, M. (1994): Stichprobenverfahren für feste Siedlungsabfälle unter besonderer Berücksichtigung von Hausmüllsortierungen. Müllhandbuch (Beitrag 1712). Erich Schmidt Verlag, Berlin.
- Rasemann, W. (1993): Brauchen wir eine Probenahmeforschung für die Abfall- und Entsorgungswirtschaft? Müll und Abfall, Nr. 6, S. 460–469. Berlin.
- Rasemann, W. & Herbst, M. (2000): Ein Probenahmemodell für heterogene Stoffsysteme. Erzmetall, 53(4), S. 228ff. Freiberg.
- Rasemann, W. & Herbst, M. (2005): Probenahmemethoden für die Bestimmung der chemischen, physikalischen und biologischen Eigenschaften fester Abfälle. Müllhandbuch (Beitrag 1662). Erich Schmidt Verlag, Berlin.
- Sommer, K. (1979): Probenahme von Pulvern und körnigen Massengütern – Grundlagen, Verfahren, Geräte. Springer-Verlag, Berlin. ISBN 9783540094661.
- Stange, K. (1958): Probenahme vom Band. Metrika, 1, S. 177–222.
- Umweltbundesamt [Hrsg.] (1993): Bundesweite Gewerbeabfalluntersuchung, Forschungsbericht 103 03 224, UBA-FB 94-111, im Auftrag des Umweltbundesamtes, Berlin. Herausgegeben in einer Kurzfassung als UBA-TEXTE 68/94.
- Zwiese, B. (1998): Statistische Gesichtspunkte bei der Auswahl von Stichprobeneinheiten für Hausmülluntersuchungen. Müllhandbuch (Beitrag 1713). Erich Schmidt Verlag, Berlin.
- Zwiese, B. (2004): Entwicklung einer neuen Probenahmemethode für heterogene Abfälle geringer Schüttdichte (Dissertation). Technische Universität Berlin. Rhombos-Verlag, Berlin.
- Zwiese, B. (2005): Probenahmemethoden für die Bestimmung von Menge und Zusammensetzung fester Abfälle. Müllhandbuch (Beitrag 1661). Erich Schmidt Verlag, Berlin.
- Zwiese, B. (2008): Auswertungsmethoden für die Bestimmung der Menge und Zusammensetzung fester Abfälle. Müllhandbuch (Beitrag 1681). Erich Schmidt Verlag, Berlin.